Probabilités - Fiche 8

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

18 janvier 2011

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes de loi normale centrée réduite (c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance 1). On rappelle que la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 est donnée par :

$$dP_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx\,.$$

1. Quelle l'espérance de X^2 ?
2. Soit $U = 2X + Y$ et $V = X - 2Y$. Montrer que U et V sont indépendantes, et donner leur loi.

Exercice 2

Soit un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}_3(0, \mathrm{Id})$. On pose

$$U = X_1 - X_2 + X_3 \qquad T_1 = X_1 + X_2 \qquad T_2 = X_2 + X_3 \qquad T_3 = X_1 - X_3.$$

1) Quelle est la loi de U ?
2) Montrer que U est indépendant du vecteur (T_1, T_2, T_3), et indépendant de T_i, $i \in \{1, 2, 3\}$.
3) On pose $V = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$. Quelle est la loi de $V/3$? Indications :
   - Ecrire le vecteur $T = (T_1, T_2, T_3)$ sous la forme AX pour une matrice A de taille 3×3.
   - Calculer les valeurs propres de $A^T A$.
   - Conclure.
4) Quelle est la loi du couple (U, V) ?

Exercice 3

On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2. On cherche à estimer σ^2 par un estimateur de la forme

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} X_k^2\,,$$

où p est un nombre réel positif.

On rappelle que le *biais* de $\hat{\sigma}_p^2$ est la quantité $\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_p^2\right] - \sigma^2$. On appelle *risque quadratique moyen* de $\hat{\sigma}_p^2$ est la quantité :

$$R(p) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\sigma}_p^2 - \sigma^2\right)^2\right]\,.$$

1. Que vaut $\mathbb{E}\left[X_1^j\right]$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$?

2. Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit sans biais ?
3. Comment choisir p pour que $\hat{\sigma}_p^2$ soit de risque quadratique minimal ?

On suppose désormais que $Y_1, \dots Y_n$ sont des variables indépendantes telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu. On pose $\bar{Y_n} = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ et

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 .$$

4. Quelle est la loi de $\bar{Y_n}$?
5. Montrer que $\bar{Y_n}$ est indépendant de S_n^2.
6. Montrer que S_n^2/σ^2, suit une loi du chi-2 à $n-1$ degrés de liberté.
7. Proposer un estimateur de σ^2 dont le biais est nul.
8. Proposer un autre estimateur ayant un (strictement) meilleur risque quadratique.

Exercice 4

On appelle *quantile d'ordre* α d'une v.a.r. Z (à densité sur $\mathbb{R}$), le réel c_α tel que $P(Z \leqslant c) = \alpha$. Le quantile d'ordre 0.5 est *la médiane.*

Une agence de voyage dispose de 100 places sur un vol Paris/ New-York. Pour tenir compte des éventuels désistements, elle décide d'accepter 120 réservations. La probabilité pour qu'un passager ayant réservé, se présente à l'embarquement est 0.8 et les passagers sont supposés indépendants.

1) Quelle est la loi de la v.a. S égale au nombre de passagers, qui, ayant réservé leur place par l'agence, se présenteront effectivement à l'embarquement ?
2) En utilisant le TCL, proposer une approximation de la forme $\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-0.5x^2)\, dx$ de la probabilité que le nombre de passagers présents à l'embarquement soit supérieur à 100.
3) Combien de réservations au maximum l'agence aurait-elle dû accepter pour que cette probabilité soit inférieure à 0.01 : on exprimera ce nombre en fonction d'un quantile (préciser l'ordre) de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5

On s'intéresse au cours $(X_n)_{n\geqslant 0}$ d'une action, qui pour $n = 0$ vaut $X_0 = 1$ euro. Elle évolue de la façon suivante : entre l'instant n et l'instant $n+1$, son cours est multiplié par une quantité aléatoire Z_{n+1} positive :

$$\forall n \geqslant 0,\ X_{n+1} = Z_{n+1} X_n.$$

On suppose qu'il existe une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables gaussiennes réelles indépendantes centrées de variance σ^2 telles que pour tout n,

$$Z_n = \exp\left(Y_n - \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

1. Exprimer X_n en fonction des variables $(Y_n, n \geqslant 1)$, puis montrer que l'on peut écrire :
$$\forall n \geqslant 1,\ X_n = \exp\left\{ n\left(\bar{Y}_n - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}, \tag{1}$$
où $\bar{Y}_n$ est une variable aléatoire dont on précisera la loi et les paramètres.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. En utilisant (1), montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque-sûrement, et donner sa limite.

4. A-t-on $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[X_n] = 0$?

Exercice 6

Un investisseur souhaite répartir au mieux son capital entre deux actifs financiers A et B. On suppose qu'un euro investi dans l'actif A (resp. B) rapportera à la fin de l'année un gain aléatoire X (resp. Y). Soit $p \in [0, 1]$. L'investisseur envisage deux stratégies :

- investir une proportion p de son argent dans l'actif A et le reste dans l'actif B ;
- investir tout son argent dans l'actif A avec probabilité p, ou bien dans l'actif B avec probabilité $1 - p$.

Le rendement d'une stratégie est égal au gain obtenu à la fin de l'année pour un euro investi.

On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2, et on note :

$$\mu_X = \mathbb{E}[X], \quad \mu_Y = \mathbb{E}[Y], \quad \sigma_X^2 = \mathrm{Var}[X], \quad \sigma_Y^2 = \mathrm{Var}[Y], \quad \gamma = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

Soit Z une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p indépendante de X et Y.

1. Expliquer à quoi correspondent les variables aléatoires

$$G = pX + (1-p)Y \text{ et } H = ZX + (1-Z)Y = \begin{cases} X & \text{si } Z = 1, \\ Y & \text{si } Z = 0. \end{cases}$$

2. Calculer $\mathbb{E}[G]$ et $\mathrm{Var}[G]$ en fonction de p, μ_X, μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2 et γ.
3. Calculer $\mathbb{E}[H]$ et $\mathrm{Var}[H]$ en fonction de p, μ_X, μ_Y, σ_X^2, σ_Y^2 et γ.
4. Montrer que $\mathrm{Var}(H) - \mathrm{Var}(G) \geqslant 0$. Quelle stratégie conseilleriez-vous, et pourquoi ?

Dans la suite de l'exercice, on se concentre exclusivement sur la première stratégie. On s'intéresse à différentes compositions de portefeuille, c'est-à-dire à différentes façons de choisir la proportion p d'argent investi dans l'actif A. On fait de plus l'hypothèse que (X, Y) est un vecteur gaussien, et on note

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

5. Quelle est la loi de G ?
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $P(G \leqslant x)$ à l'aide de la fonction Φ et de $p, \mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \gamma$.

On suppose que $\mu_X = \mu_Y > 0$ et $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \neq 0$.

7. Donner la composition du portefeuille qui minimise la probabilité de l'évènement $\{G < 0\}$ lorsque X et Y sont indépendantes.
8. En développant $\mathbb{E}\left[((X - \mu_X) - (Y - \mu_Y))^2\right]$, montrer que $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \geqslant 2\gamma$, avec égalité si et seulement si $X - Y$ est presque sûrement constante.
9. Donner la composition du portefeuille qui minimise la probabilité de l'évènement $\{G < 0\}$ sans supposer l'indépendance de X et Y.