Probabilités - Fiche 7

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

9 janvier 2011

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On suppose que X admet des moments d'ordres un et deux et par conséquent, une variance σ^2.

1. Trouver l'antécédent μ du minimum de $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\big[(X-a)^2\big]$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \geqslant 0$,
$$|X-a| - \big|X-(a+h)\big| = \big(\mathbb{I}_{\{X \geqslant a+h\}} - \mathbb{I}_{\{X \leqslant a\}}\big)\, h + r(X)\, \mathbb{I}_{\{a<X<a+h\}} \ ,$$
où r est une fonction bornée par h.
3. En déduire que la fonction $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\big[\, |X-a| \,\big]$ est dérivable et préciser sa dérivée. Trouver l'antécédent m du minimum de cette fonction : comment appelle-t-on m ?
4. Montrer que $|m-\mu| \leqslant \sigma\sqrt{2}$. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Exercice 2

Un sapin est décoré par trois boules lumineuses, qui contiennent chacune une ampoule. On note X_i la durée de vie de l'ampoule numéro $i \in \{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avant de la voir claquer. On suppose que les variables X_i sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

1. Quelle est l'espérance de la durée de vie d'une ampoule ?
2. On note T la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avec que la première des trois ampoules ne claque. Calculer $P(T > x)$ pour tout $x > 0$, puis en déduire la loi de T.
3. On note U la durée qu'il faut attendre après l'installation du sapin avec que les trois ampoules aient toutes claqué. Quelle est la loi de U.
4. Quelle est l'espérance de U ? Pourquoi pouvait-on attendre $1/\lambda \leqslant \mathbb{E}[U] \leqslant 3/\lambda$?
5. Le sapin est rangé fin janvier sans que les ampoules n'aient claqué. L'année suivante, on reprend les *même ampoules* pour illuminer le nouveau sapin. Faut-il s'attendre à ce que les ampoules claquent plus vite ?

Exercice 3

On tire un nombre X uniformément sur $[0, 1]$. On tire ensuite des nombres $Y_1, Y_2, \cdots$ indépendamment les uns des autres et indépendamment de X, uniformément sur $[0, 1]$. Le jeu s'arrête dès que $Y_i > X$. Vous gagnez alors $(i-1)$ euros. On appelle G le gain.

1. Pour k entier, montrer que

$$\int_{[0,\,1]^{k+2}} \mathbb{I}_{\{y_1 \leqslant x, \dots,\, y_k \leqslant x,\, y_{k+1} > x\}}\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 \dots \mathrm{d}y_{k+1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

   On conviendra que $\mathbb{I}_{\{y_1 < x, \dots,\, y_0 < x,\, y_1 > x\}} = \mathbb{I}_{\{y_1 > x\}}$.
   On traitera séparément les cas $k = 0$ et $k > 0$.

2. Calculer la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G.

Exercice 4

On considère un système constitué de n composants. On suppose que les durées de vie des composants sont des v.a. exponentielles $T_1, \cdots, T_n$ de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (strictement positifs) ; et que ces v.a. sont indépendantes.

1) On suppose que le système est en parallèle : il fonctionne lorsqu'au moins un des composants fonctionne. Exprimer la durée de vie T du système en fonction de v.a. $T_i, i \leqslant n$. Déterminer la fonction de répartition de T.
2) On suppose que le système est en série : il fonctionne lorsque tous les composants fonctionnent. Déterminer la fonction de répartition de T et reconnaître sa loi.

Exercice 5

Pour tout a réel strictement positif, G_a désigne une variable aléatoire de loi gamma de paramètres $(a, 1)$: la densité g_a de sa loi est donnée par

$$g_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{-x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

En particulier, G_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1. On admet que

$$\mathbb{E}[e^{itG_a}] = (1 - it)^{-a}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour a, b réels strictement positifs, $B_{a,\,b}$ désigne une variable aléatoire de loi bêta de paramètres (a, b) : la densité $h_{a,\,b}$ de sa loi est donnée par

$$h_{a,\,b}(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, y^{a-1}(1-y)^{b-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

1. Calculer la loi du couple $(G_{a+b}B_{a,\,b},\ G_{a+b})$ lorsque les v.a. G_{a+b} et $B_{a,b}$ sont indépendantes.
2. En déduire que pour deux variables $G_{a+b}, B_{a,b}$ indépendantes, la loi de $B_{a,\,b}G_{a+b}$ est identique à celle de G_a.
3. Soit $n \geqslant 1$. Montrer par récurrence, que lorsque les v.a. $B_{a,1}, \cdots, B_{a+n-1,1}, G_{a+n}$ sont indépendantes, la loi de

$$P_n = (B_{a,1} B_{a+1,1} \dots B_{a+n-1,1}) G_{a+n}$$

   est la même que celle de G_a.
   On utilisera la question précédente et on évitera les longs calculs.
4. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de G_a, montrer que $G_a + X$ a la même moi que G_{a+1}.

5. En déduire que pour tout entier n, G_{a+n} a même loi que
$$H_n = G_a + X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
où les X_i sont des v.a. dont on précisera les propriétés.

On pose $W_n = G_a + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ où les X_i sont indépendantes, identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les v.a. G_1 et $\{X_k, k \geqslant 1\}$ sont définies sur le même espace de probabilité.

6. Quelle est la limite presque-sûre de $(n^{-1}W_n,\ n \geqslant 1)$?
7. Montrer que la suite $(n^{-1}G_{a+n},\ n \geqslant 1)$ converge en loi vers une loi que l'on précisera.