# Probabilités - Fiche 6

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

4 janvier 2011

**Exercice 1**

Une cerise est placée sur la circonférence d'un gateau rond que l'on partage en deux au hasard en pratiquant deux découpes suivant des rayons. Si on prend la position de la cerise comme origine des angles, les positions $U$ et $V$ des deux coups de couteau sont des variables uniformément sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes.

1) Exprimer la taille $T$ de la part contenant la cerise en fonction de $U$ et de $V$.
2) Calculer son espérance et la probabilité qu'elle soit plus grosse que l'autre.
3) Quelle doit être la position d'un gourmand qui doit choisir entre la part avec la cerise et la part sans la cerise, avant le découpage ?

**Exercice 2**

Soit $X, Y$ deux v.a. indépendantes, chacune de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$U = \sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y), \qquad V = \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)$$

1. Quelle est la loi du couple $(X, Y)$ ?
2. Quelle est la loi du couple $(U, V)$ ?
3. Les v.a. $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 3**

*(Examen Décembre 06)* On rappelle que

$$\int_0^1 u^{-1/2}\,(1-u)^{-1/2}\,du = \pi.$$

Soit $X = (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(0, \mathrm{Id})$. On pose

$$U = \frac{X_1^2}{X_1^2 + X_2^2} \qquad V = X_1^2 + X_2^2.$$

1) Calculer la densité de la loi de $(U, V)$.
2) Donner les densités marginales de $U$ et $V$. On précisera les constantes de normalisation.
3) Soit $Z = X_2^2/X_1^2$. Exprimer $Z$ en fonction de $U$ puis calculer la densité de la loi de $Z$.

**Exercice 4**

Soient $a, \lambda > 0$. On appelle loi Gamma de paramètres $(a, \lambda)$, que l'on note $\mathcal{G}(a, \lambda)$, la loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité donnée par

$$f(x) = C\ \lambda^a\ \exp(-\lambda x)\ x^{a-1}\ \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

On définit la fonction gamma - notée $\Gamma$ - sur $\mathbb{R}_\star^+$ par $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx$ (on peut montrer par une intégration par parties que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$).

1. Soit $X \sim \mathcal{G}(a, \lambda)$. Calculer la constante de normalisation $C$ en fonction de la fonction $\Gamma$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes, de lois respectives $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$.
   (a) Quelle est la loi de $(X+Y, X/(X+Y))$ ?
   (b) les v.a. $X+Y$ et $X/(X+Y)$ sont-elles indépendantes ? préciser leurs lois.
   (c) reconnaître la loi de $X+Y$.
   (d) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^1 x^{a-1}\ (1-x)^{b-1} dx$.
3. Quelle est la loi de $X/Y$ ?

**Exercice 5**

Soient $\{X_n, n \geqslant 1\}$ une famille de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $T_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
2) En déduire la loi de $T_n$.
3) Calculer directement la fonction caractéristique de $T_n$.

**Exercice 6**

Soit $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$T_0 = 0 \qquad\qquad T_n = T_{n-1} + \tau_n, \quad n \geqslant 1.$$

La suite de v.a. $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ représente la durée entre deux arrivées successives de clients dans une file d'attente, entre deux requêtes successives à un serveur, $\cdots$.
On a donc $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ ce qui signifie que $T_n$ est la somme de $n$ v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ : on sait que $T_n$ suit une loi Gamma de paramètres $(n, \lambda)$.

1) a) Quelle est la densité du couple $(T_n, \tau_{n+1})$ ? ( on pourra observer que $T_n$ est $\tau_{n+1}$ sont indépendantes : pourquoi ?).
   b) En déduire que pour tout $s \geqslant 0$, $t > 0$,

$$P\left(T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1} - s\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t)\ \exp(-\lambda s). \tag{1}$$

2) Soit $t > 0$. On note $N_t$ la v.a. qui compte le nombre de clients arrivés pendant l'intervalle $[0, t]$. On a donc

$$N_t = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{I}_{T_n \leqslant t}.$$

   a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\{N_t = n\} = \{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}$.
   b) En utilisant (1), en déduire que $N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t$.
3) Soit $t > 0$. On appelle

- $V_t$ le temps qui sépare $t$ de la prochaine arrivée d'un client.
- $U_t$ la durée qui sépare la dernière arrivée du client avant $t$, et $t$. Par convention : $U_t = t$ si il n'est pas arrivé de clients avant $t$.

Soient $y \geqslant 0$ et $x \in [0, t[$.

a) Montrer que $N_{t+y} - N_{t-x}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(x+y)$.

b) Montrer que
$$[V_t > y, U_t \geqslant x] \Longleftrightarrow [N_{t+y} - N_{t-x} = 0] \, .$$

c) En déduire que $P(V_t > y, U_t \geqslant x) = \exp(-\lambda(x+y))$.

d) Déduire de la question précédente : la loi de $U_t$, de $V_t$, et l'indépendance des v.a. $U_t, V_t$.

e) Un observateur observe la file à l'instant $t$ : quelle est la durée moyenne avant l'arrivée du prochain client dans la file ? quelle est la durée moyenne entre la dernière arrivée avant $t$, et la première après $t$ ?