Probabilités - Fiche 5

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

14 décembre 2011

Exercice 1

Soit F la fonction de répartition donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ t/4 & 0 \leqslant t < 1, \\ 1/2 & 1 \leqslant t < 2, \\ 2/3 + \alpha(1 - \exp(-(t-2))) & t \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Déterminuer α et tracer le graphe de F.
2. Montrer que la probabilité P sur $\mathbb{R}$ dont F est la fonction de répartition s'écrit comme une somme de mesures de Dirac et d'une mesure ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2

Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X, telle que X et $2X$ ont même fonction de répartition. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout x, $F_X(2^n x) = F_X(x)$. En déduire la loi de X.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1) Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $Y = \exp(X)$?
2) Soit X une v.a. de Cauchy sur $\mathbb{R}^+$ de densité donnée par $f(x) = c\ (1+x^2)^{-1}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x)$. Que vaut c ? Quelle est la loi de $Y = 1/X$?
3) Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Quelle est la loi de X^2 ?
   (b) Quelle est la loi de Y définie par
   $$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leqslant 1, \\ 2X & \text{si } X > 1. \end{cases}$$
4) Soit un réel $\alpha > 0$. Soient U une v.a. uniforme sur $[0,1]$; Y une v.a. de Bernoulli de paramètre $1/(1+\alpha)$; et X une v.a. de densité $f(x) = \alpha/x^{1+\alpha}\mathbb{I}_{]1,+\infty)}(x)$. Ces v.a. sont indépendantes.
   (a) Calculer la fonction de répartition de X ; en déduire que X a même loi que $U^{-1/\alpha}$.
   (b) On pose
   $$Z = \begin{cases} X & \text{si } Y = 1 \\ U & \text{si } Y = 0 \end{cases}$$
   Quelle est la fonction de répartition de Z, et sa densité si elle existe ? Graphe de ces fonctions.

Exercice 4

La fonction de répartition d'une v.a. uniforme U sur $[0,1]$ est donnée par

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. admettant une fonction de répartition F continue et strictement croissante. On pose $Y = F(X)$. Montrer que Y est une v.a. Quelle est la fonction de répartition de Y ?
2. Soit F une fonction de répartition (non nécessairement continue). On désigne par F^{-1} son inverse généralisée i.e. $F^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ est définie par

$$F^{-1}(t) = \inf\{y \in \mathbb{R} \ : F(y) \geqslant t\}.$$

   (a) Vérifier que $F \circ F^{-1}(t) \geqslant t$ pour tout $t \in]0,1[$.

   (b) Montrer que $[x \leqslant F(t)] \iff [F^{-1}(x) \leqslant t]$ pour tout $x \in]0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Montrer que $F^{-1}(U)$ est une v.a. et que la v.a. $F^{-1}(U)$ admet F comme fonction de répartition. En déduire une méthode pour obtenir des réalisations d'une v.a. dont la fonction de répartition est F.

   (d) Application : proposer un algorithme pour obtenir des réalisations d'une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 5

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une v.a.r. positive de densité f_X. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X \geqslant x)\ dx.$$

Proposer une relation similaire pour $\mathbb{E}[X^r]$, $r > 0$.

Exercice 6

Un charcutier fabrique chaque jour x kilos de choucroute : il la vend p euros le kilo, pour un coût de fabrication de $c < p$ euros le kilo. La demande varie d'un jour à l'autre : on la modélise par une variable aléatoire positive X dont on note F la fonction de répartition, et on suppose que F est continue. S'il lui reste de la choucroute invendue en fin de journée, il l'offre gratuitement à une association.

1. Exprimer le profit P réalisé en une journée par la vente de choucroute en fonction de x, p, c et X .
2. Pour des valeurs p, c et F fixées, quelle est la quantité que doit produire le charcutier pour optimiser son profit journalier moyen ?
3. Si X suit une loi exponentielle de densité $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ avec $\lambda > 0$, proposer intervalle I contenant avec probabilité 95% le profit que le charcutier réalise en produisant la quantité prescrite dans la question (2).

Exercice 7

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, soit $X = 1/\sqrt{U}$ et soit $Y = \min\{X, 2\}$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer l'espérance de X. X a-t-elle une variance finie ?
3. Quelle est la loi de Y ?
4. Calculer l'espérance de Y. Y a-t-elle une variance finie ?