Probabilités - Fiche 4

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

6 décembre 2011

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit I un ensemble fini ou dénombrable et $\{\omega_i; i \in I\}$ des éléments de Ω. Soit $(a_i, i \in I)$ une famille de réels positifs. On pose

$$\lambda(A) = \sum_{i \in I} a_i \; \delta_{\omega_i}(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

1) Vérifier que la fonction d'ensemble λ est bien une mesure sur Ω

2) A quelle condition cette mesure est-elle bornée ? est-elle une probabilité ?

Lorsque (a) Ω est fini ou dénombrable de sorte que $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ et (b) $a_i = 1$ alors $\lambda(A) = \sum_{i \in I} \delta_{\omega_i}(A)$: cette mesure est la mesure dénombrante car $\lambda(A)$ est égal au cardinal de A.

Exercice 2

On jette indéfiniment une pièce de monnaie biaisée qui tombe sur PILE avec probabilité $p \in]0,1[$. Pour tout entier k, soit A_k l'événement 'on observe au moins k fois PILE consécutivement entre le lancer numéro 2^k et le lancer numéro $2^{k+1} - 1$. Calculer $P(\limsup A_k)$, et interpréter.

Exercice 3

Soient $(A_n, n \geqslant 0)$ des parties de Ω. On rappelle que pour une suite de fonctions $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, la limite supérieure notée $\limsup_n f_n$ est la fonction qui à tout élément x de Ω associe la limite supérieure des nombres réels $(f_n(x))_n$:

$$\limsup_n f_n(x) = \lim_n \left(\sup_{k \geqslant n} f_k(x) \right) = \inf_{n \geqslant 1} \left(\sup_{k \geqslant n} f_k(x) \right).$$

Idem pour la limite inférieure d'une suite de fonctions :

$$\liminf_n f_n(x) = \lim_n \left(\inf_{k \geqslant n} f_k(x) \right) = \sup_{n \geqslant 1} \left(\inf_{k \geqslant n} f_k(x) \right).$$

Montrer que $\limsup_n \mathbb{I}_{A_n} = \mathbb{I}_{\limsup_n A_n}$ et $\liminf_n \mathbb{I}_{A_n} = \mathbb{I}_{\liminf_n A_n}$.

Exercice 4

On considère le jeu de pile ou face infini : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ munie de la tribu produit et de la probabilité produit rendant chaque lancer indépendant des autres et tel que $P(\{\omega : \omega_i = P\}) = p$, $p \in]0,1[$. On considère l'application $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par

$$T(\omega) = \begin{cases} \infty & \text{si } \omega = (F, F, F, \cdots), \\ \inf\{i : \omega_i = P\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la loi de T est donnée par

$$P_T(k) = (1-p)^{k-1}p.$$

   P_T est appelée *loi géométrique de paramètre* p.

2. Montrer que pour tout $k, n \geqslant 0$ on a

$$P(T > k+n | T > k) = P(T > n).$$

   On dit que la loi géométrique est *sans mémoire.*

3. Soient T_1 et T_2 deux variables aléatoires de loi géométrique de paramètres respectifs p et q. Déterminer la loi de $X = \min(T_1, T_2)$ et $Y = \max(T_1, T_2)$.

Exercice 5

Audrey lance un dé (non pipé) autant de fois que nécessaire pour obtenir successivement un 1, puis un 6. On note $X_1, X_2, \ldots$ les variables aléatoires modélisant les résultats des lancers d'Audrey.

1. Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

2. On définit la suite de variables aléatoires $Y_0, Y_1, \ldots$ de la façon suivante : pour tout entier t positif ou nul,

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 2, X_{t-1} = 1 \text{ et si } X_t = 6; \\ 2 & \text{si } t \geqslant 1, X_t = 1; \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer : $\forall t \geqslant 0, P(Y_{t+1} = j | Y_t = i) = M_{i,j}$, où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

3. On note x le nombre moyen de lancers nécessaires à Audrey pour obtenir lors de deux lancers successifs sa combinaison (1,6). Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que le couple (x, y) satisfait l'équation suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y \\ y = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \end{cases}$$

   En déduire la valeur de x.

4. Audrey joue contre Bertrand : elle a choisi la combinaison (1,6) alors que Bertrand a choisi la combinaison (3,3). L'un des deux gagnera-t-il plus vite que l'autre ?

5. Que dire si le jeu continue au delà de la première occurence de la combinaison gagnante ?

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$), représentant le nombre d'oeufs de tortues marines pondus lors d'une saison aux Caraïbes. Pour diverses raisons, chaque oeuf a, indépendamment des autres, une probabilité p de donner naissance à un bébé tortue. On note $\{Y_n,\, n \geqslant 1\}$ une suite de v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p : $P(Y_n = 1) = p = 1 - P(Y_n = 0)$.

On suppose que les v.a. $(X,\, Y_1,\, Y_2,\, \cdots)$ sont indépendantes. On note S la variable aléatoire définie par

$$S = 0 \text{ si } X = 0 \text{ et } S = \sum_{n=1}^{X} Y_n \text{ pour } X > 0.$$

1) Que représente concrètement S ?
2) Donner la fonction génératrice de X et Y_n.
3) Calculer pour tout entier m et k, $P(S = k \,|\, X = m)$.
4) Montrer que S suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
5) Calculer pour tout entier m et k, $P(X = m \,|\, S = k)$.

Exercice 7

On désire étudier la probabilité d'extinction d'un nom de famille. Pour ce faire, on introduit une famille de v.a. $(Z_n, n \geqslant 0)$: Z_n est le nombre de descendants garçons à la génération n issus d'un unique ancêtre $(Z_0 = 1)$. On modélise le nombre d'enfants à chaque génération de la façon suivante :

- Si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$ i.e. si à la génération n, plus personne ne porte le nom, il en sera de même pour toutes les générations futures.
- Sinon, pour chacun des hommes de la génération n (pour $i = 1$ à Z_n), on compte le nombre d'enfants garçons (une v.a. $Y_{i,n}$) ce qui s'écrit : $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{i,n}$ où
  - pour tout (i, n), $Y_{i,n}$ est une v.a. de loi $(p_j, j \geqslant 0)$.
  - On suppose de plus que pour tout n, $(Y_{i,n}, i \geqslant 1)$ sont des v.a. indépendantes et qu'elles sont indépendantes des v.a. $(Z_0, \cdots, Z_n)$.
  - On suppose que $\mathrm{Var}(Y_{i,n}) < +\infty$.

On pose

$$m = \mathbb{E}[Y_{i,n}] \qquad G_n(s) = G_{Z_n}(s) \qquad G(s) = G_{Y_{i,n}}(s).$$

1) (a) Exprimer l'évènement "il y a extinction du nom de famille" en fonction des évènements $\{Z_n = 0\}$, $n \geqslant 0$.
   (b) En déduire la probabilité que le nom s'éteigne, en fonction de $G_n(0)$. On note η cette probabilité.
2) On va caractériser η comme la plus petite solution d'une équation au point fixe :
   (a) Montrer que $G_n = G_{n-1} \circ G = G \circ G_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire que η est solution de l'équation de point fixe $s = G(s)$.
   (c) Montrer que $s = 1$ est toujours solution, puis que η est la plus petite solution de cette équation sur $[0, 1]$.
3) **Cas 1 :** En déduire que si $p_0 = 0$ alors $\eta = 0$. Interprétation de ce résultat ?
4) **Cas 2 :** On suppose dorénavant que $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$. Montrer que $\eta = 1$.
5) **Cas 3 :** On suppose dorénavant que $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$.
   (a) Montrer que la fonction $H : s \mapsto G(s) - s$ est strictement convexe sur $]0, 1[$.
   (b) **Cas 3-a :** Montrer que pour tout $0 < s < 1$, $G(s) > (1 - m) + ms$. En déduire que si $m \leqslant 1$, $\eta = 1$.
   (c) **Cas 3-b :** Montrer que si $m > 1$, $\eta \in]0, 1[$ (montrer que $H(0) > 0$, $H(1) = 0$ et $H'(1) > 0$ et conclure).
6) On introduit le modèle géométrique : $p_0 = 1 - \beta$ et $p_j = \beta(1 - p)^{j-1}p$ pour $j \geqslant 1$. $(0 < \beta, p < 1)$.
   (a) Calculer m et vérifier que $\mathrm{Var}(Y_{i,n}) < +\infty$.

(b) Donner l'expression de G en fonction de β, p.

(c) Résoudre l'équation de point fixe $s = G(s)$.