Probabilités - Fiche 3

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

30 novembre 2011

Exercice 1

Soit Ω un ensemble, soit $A \subset \Omega$ et soit $\{B_n : n \geqslant 1\}$ une partition dénombrable de Ω.

- Quelle est la tribu engendrée par $\{A\}$?
- Quelle est la tribu engendrée par $\{B_n : n \geqslant 1\}$?

Exercice 2

Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]-\infty, q]$, avec $q \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{A} = \{B \subset \mathbb{Z} : -B = B\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

Exercice 4

Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $1 \leqslant i \leqslant d$ une famille d'espaces mesurables. On définit l'espace produit $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ que l'on munit de la tribu produit $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$. On définit les applications coordonnées pour $1 \leqslant i \leqslant d$ par $X_i : \Omega \to \Omega_i$, $X_i(\omega) = \omega_i$ où $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$.

1) Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, X_i est une application mesurable de $(\Omega, \otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$ dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.
2) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, X_i est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Montrer que $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$.

`Conclusion :` La tribu $\otimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i$ est la plus petite tribu sur Ω qui rend les applications coordonnées mesurables. C'est donc la tribu engendrée par les applications $\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$ sur Ω.

Exercice 5

Soit $X : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ la variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$ par $X(k) = k \mod 3$, le reste dans la division euclidienne de k par 3. Quelle est la tribu engendrée par X ?

Exercice 6

Soient $(A_n, n \geqslant 0)$ une famille de parties de Ω. On définit les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ par

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geqslant 0} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \qquad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

ou encore $\liminf_n A_n = \{x \in \Omega, \exists n \forall k \geqslant n, x \in A_k\}$ et $\limsup_n A_n = \{x \in \Omega, \forall n, \exists k \geqslant n, x \in A_k\}$.

On dit que la suite d'ensembles $(A_n, n \geqslant 0)$ converge ssi $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$; dans ce cas, cette valeur commune est notée $\lim_n A_n$.

1. Montrer que $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.
2. Soit $(A_n, n \geqslant 0)$ une suite croissante. Montrer que $\lim_n A_n$ existe. Que vaut-elle ?
3. Soit $(A_n, n \geqslant 0)$ une suite décroissante. Montrer que $\lim_n A_n$ existe. Que vaut-elle ?

Exercice 7

1. On définit la famille d'ensembles $\{A_n, n \geqslant 1\}$ par : $A_n = A$ si n est pair ; et $A_n = B$ si n est impair. Donner l'expression de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ en fonction de A et B.
2. On définit une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $\{A_n, n \geqslant 1\}$ par $A_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$. Donner l'expression de $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$. La suite $\{A_n, n \geqslant 1\}$ converge-t-elle ?

Exercice 8

Soit $\{A_n, n \geqslant 0\}$ une famille de parties de Ω.

1. Montrer que $\overline{\liminf_n A_n} = \limsup_n \overline{A_n}$ et que $\overline{\limsup_n A_n} = \liminf_n \overline{A_n}$.
2. Montrer que $\liminf_n (A_n \cap B_n) = [\liminf_n A_n] \cap [\liminf_n B_n]$; et en déduire que $\limsup_n (A_n \cup B_n) = [\limsup_n A_n] \cup [\limsup_n B_n]$.
3. (a) Montrer que $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset [\limsup_n A_n] \cap [\limsup_n B_n]$.

   (b) On définit pour $n \geqslant 1$, A_n et B_n par

$$A_n = \begin{cases} \left[0, 1 - \frac{1}{n+1}\right] & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left[0, 1 + \frac{1}{n+2}\right] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{n+2}, 2\right] & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left[1 + \frac{1}{n+1}, 2\right] & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

   Déterminer $\limsup_n (A_n \cap B_n)$, $\limsup_n A_n$ et $\limsup_n B_n$. Conclure.