Probabilités - Fiche 2

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

16 novembre 2011

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_2(\{0,1\})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels M telles que $M_{i,j} \in \{0,1\}$ pour tout $i, j \in \{1,2\}$.

1. Combien y a-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$? Parmi celles-ci, combien sont-elles inversibles ?
2. Soient $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$. On définit

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0,1\}) \qquad \text{et} \qquad R = \mathrm{rang}(B) \ .$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire R. Calculer son espérance, sa variance.
3. Même question avec $p \in [0,1]$ quelconque.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de p la probabilité que B est inversible est-elle maximale ?
   Pour quelle(s) valeur(s) de p l'espérance de R est-elle maximale ?

Exercice 2

Un facteur doit distribuer n lettres à n destinataires distincts, mais il ne sait pas lire.

- Quelle est la probabilité qu'il distribue correctement les n lettres ?
- Quelle est l'espérance du nombre de lettres correctement distribuées ?
- qu'il n'en distribue aucune à son destinataire ?

Exercice 3

On souhaite dépister, grâce à un contrôle sanguin, quels sont les bovins atteints par une certain virus dans un troupeau de n bêtes. On sait que chaque bête a, indépendamment des autres, une probabilité $p \in]0,1[$ d'être atteinte. Comme chaque test coûte cher, on procède de la manière suivante : on forme des groupes de m bêtes (on suppose que m divise n) ; dans chaque groupe, on mélange les prélèvements sanguins des bovins en un seul 'super-échantillon', dans lequel on teste la présence du virus (il suffit qu'une seule bête du groupe soit infectée pour que le test soit positif). Si on décèle la présence du virus dans un super-échantillon, on teste toutes les bêtes du groupe séparément.

1. Quelle est la loi du nombre de bêtes atteintes dans le troupeau ? Rappeler (sans calcul) son espérance et sa variance
2. Calculer l'espérance $E(m)$ du nombre de tests effectués
3. Pour quelles valeurs de p vaut-il mieux choisir $m = n$ plutôt que $m = 1$?

Question bonus
Y a-t-il une valeur de m optimale ? Équivalent quand $n \to \infty$ de la valeur trouvée en (3) ?

Exercice 4
On considère une usine de voitures ayant n ouvriers. Un ouvrier y produit une voiture en un jour. Chaque jour, l'usine emploie tous ses ouvriers, sauf si (au moins) l'un d'eux a son anniversaire — auquel cas la journée est chômée par tous. On considère que les dates anniversaires des ouvriers sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'année, et on ignorera pour simplifier l'existence d'années bissextiles. On note N le nombre de jours de l'année qui sont chômés par l'usine.

1. Écrire, en fonction n et de N, le nombre de voitures produites par l'usine en un an.
2. Calculer l'espérance de N.
3. Pour quel nombre d'ouvriers n l'espérance du nombre de voitures produites est-elle maximale ?

Question bonus
Donner la valeur approchée à 1 près de $-\Big(\log(364/365)\Big)^{-1}$

Exercice 5

1. Question préliminaire : suites arithmético-géométriques. Soient r et s deux nombres réels tels que $r \neq 1$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par la relation de récurrence suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & \in & \mathbb{R}, \\ u_{n+1} & = & ru_n + s, \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$
On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_n = u_n - s/(1-r)$.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = rv_n$. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} = \frac{s(1-r^n)}{1-r} + r^n u_1.$$
A quelle condition nécessaire et suffisante sur r, s et u_1 la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ? Quelle est alors sa limite ?

On veut étudier les variations du nombre d'exemplaires disponibles d'un livre (disons, votre manuel favori d'économie) dans une bibliothèque. Le règlement de cette bibliothèque est le suivant : un livre emprunté au cours de la semaine numéro n doit impérativement être rendu à la fin de la semaine numéro $n+1$, de sorte qu'il pourra être remis dans les rayons au début de la semaine $n+2$. On appelle N le nombre total d'exemplaires que possède la bibliothèque. On suppose que chaque semaine, un exemplaire disponible a (indépendamment de tout le reste) une probabilité $p \in]0,1[$ d'être emprunté. On suppose par ailleurs que tous les exemplaires empruntés à la semaine n sont rendus juste à temps : ils pourront tous être réempruntés à partir du début de la semaine $n+2$.

On note X_n le nombre de livres disponibles au début de la semaine n. On suppose qu'au début de l'année (pour $n = 1$) ils sont tous disponibles.

2. Montrer que l'on peut écrire $X_1 = N$ et, pour $n \geqslant 1$,
$$X_{n+1} = N - \sum_{j=1}^{X_n} Y_{j,n},$$

où les $(Y_{j,n})_{1\leqslant j\leqslant N, n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p indépendantes que l'on interprétera. On rappelle que, par convention, $\sum_{j=1}^{0} Y_{j,n} = 0$.

3. Montrer que pour tout entier n,
$$E\left[X_n\right] = \sum_{j=1}^{N} P(X_n \geqslant j).$$
4. Montrer que $(X_n,\, Y_{j,n+k},\, 1 \leqslant j \leqslant N, k \geqslant 0)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.
5. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}\big[X_{n+1}\big] = N - p\,\mathbb{E}\big[X_n\big]$. On pourra remarquer que
$$\sum_{j=1}^{X_n} Y_{j,n} = \sum_{j=1}^{N} Y_{j,n} \mathbb{I} X_n \geqslant j.$$
6. Donner l'expression de $\mathbb{E}\big[X_{n+1}\big]$ en fonction de N, p et n. Quel est le comportement de la suite $\big(\mathbb{E}\big[X_n\big]\big)_n$ quand n tend vers l'infini ?

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction polynômiale G_n par la relation :
$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad G_n(s) = \mathbb{E}\Big[s^{X_n}\Big] = \sum_{k=0}^{N} s^k\, P(X_n = k).$$
On rappelle que par convention $0^0 = 1$.

7. Donner l'expression de G_1.
8. On note $G_n^{(m)}$ la dérivée $m-$ième de G_n. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $m \in \{0, \dots, N\}$, on a
$$P(X_n = m) = \frac{1}{m!}\, G_n^{(m)}(0),$$
On rappelle les conventions $0! = 1! = 1$ et $G_n^{(0)} = G_n$.
9. Pour $j \in \{1, \dots, N\}$, $n \geqslant 1$ et $s \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{E}\left[s^{Y_{j,n}}\right]$?
10. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $s \neq 0$,
$$G_{n+1}(s) = s^N\, G_n\Big(1 - p + \frac{p}{s}\Big)\,.$$
11. Soit $(q_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par la relation de récurrence $q_{n+1} = 1 - p\,q_n$ et par $q_1 = 1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel s,
$$G_n(s) = \left(1 - q_n + q_n s\right)^N.$$
12. Montrer que X_n suit une loi binomiale de paramètres N et q_n.
13. Montrer que la suite $(q_n)_n$ converge quand n tend vers l'infini. Quelle est sa limite ?
14. Discuter et comparer les conclusions obtenues aux questions 6 et 13.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à n faces (numérotées $1, 2, \dots, n$) pour jouer au jeu suivant :

- le joueur A lance le dé, obtient le résultat X, et verse 3 euros au joueur B ;
- le joueur B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors) ; à chaque lancer, il donne 1 euro au joueur A.

On note Y la somme versée au cours de la partie par le joueur B au joueur A.

1. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, que vaut $P(Y = j \mid X = k)$?
2. Montrer que si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, d'espérance finie, alors
$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z \geqslant k) \ .$$
3. En déduire un encadrement simple de $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de n, de même qu'un équivalent lorsque $n \to \infty$.
4. Selon la valeur de n, à quel joueur le jeu est-il favorable ? On pourra donner une image préliminaire incomplète en utilisant $e^2 \approx 7.39$ et $e^3 \approx 20.09$.

Question bonus
Cas limite $n \to \infty$: tirage uniforme $U \in [0,1]$, puis $X = k \iff k/n \leqslant U < (k+1)/n$. Jeu limite : A et B tirent des $\mathcal{U}[0,1]$.

Exercice 7
Soit n un entier strictement positif, soit $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ et soit $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$, soit $X = X_1 + \cdots + X_n$, et soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Pour $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$ et on munit l'espace $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur définie pour $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par
$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\| \ .$$
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et J la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ contenant des 1 sur la surdiagonale, et des 0 partout ailleurs :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on considère les matrices bi-diagonales $L_i = p_i(-I + J)$ et $M_i = (1-p_i)I + p_i J$. On rappelle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est définie par :
$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note de plus $N_i = \exp(L_i)$.

– Montrer que
$$M := M_1 M_2 \ldots M_n = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) J^k \ .$$
Montrer que
$$N := N_1 N_2 \ldots N_n = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k) J^k \ .$$
– Montrer que
$$\|M - N\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|M_i - N_i\|_\infty$$

– Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \left| P(X=k) - P(Y=k) \right| = \|M - N\|_\infty \ .$$

– Montrer que
$$\left\| M_i - N_i \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \|L_i^2\|_\infty \ .$$

– En déduire l'inégalité de Le Cam : pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$,
$$\left| P(X \in A) - P(Y \in A) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \ .$$