Probabilités - Fiche 1

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

9 novembre 2011

Exercice 1

Soient A, B, C trois évènements. Exprimer en fonction de A, B et C les évènements correspondant aux propriétés :

1. A seul se produit.
2. au moins l'un d'entre eux se produit.
3. les trois se produisent.
4. au plus deux d'entre eux se produisent.
5. l'un d'entre eux exactement se produit.
6. au plus l'un d'entre eux se produit.
7. au moins deux d'entre eux se produisent.

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un ensemble Ω,

1. Que valent les fonctions $\mathbb{I}_\Omega$ et $\mathbb{I}_\emptyset$?
2. Montrer que $\mathbb{I}_A \leqslant \mathbb{I}_B$ ssi $A \subset B$.
3. Déterminer les fonctions indicatrices suivantes en termes de $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$:$\mathbb{I}_{\bar{A}}$, $\mathbb{I}_{A\cap B}$, $\mathbb{I}_{A\cup B}$, $\mathbb{I}_{A\setminus B}$, $\mathbb{I}_{A\Delta B}$.

Exercice 3

Montrer la formule de Poincaré : pour tout $n \geqslant 1$ et tous $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \ .$$

Exercice 4

On travaille sur l'espace $\Omega = \{(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)\}$, muni de la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme P. Un élément de Ω est noté $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. On introduit les applications X_1, X_2, X_3 définies par $X_i(\omega) = \omega_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, X_i est une variable aléatoire.

2. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, quelle est la loi de X_i ?
3. Montrer que (X_1, X_2) a même loi que (X_2, X_3).
4. Sur $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la tribu des parties et de la probabilité uniforme, construire trois variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 telles que la loi du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) soit la même que celle de (X_1, X_2, X_3).

Exercice 5

On lance deux dés à 6 faces, et non pipés.

(i) Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 et un 2 ? d'obtenir un double 4 ?

(ii) Proposer un espace de probabilité tel que P soit la probabilité uniforme.

(iii) On s'intéresse à la somme des faces obtenues. On introduit donc une application $S : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ qui à chaque issue du lancé des deux dés, associe la somme des faces.

   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de S ?

   (b) Pour chacune de ces valeurs k, calculer la probabilité de l'évènement $\{S = k\} = \{\omega \in \Omega, S(\omega) = k\}$.

(iv) Le chevalier de Méré affirmait "il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six en lançant un dé quatre fois de suite". A-t-il raison ?

(v) Le chevalier de Méré affirmait aussi "il est avantageux de parier sur l'appparition d'au moins un double six, en lançant deux dés vingt-quatre fois de suite". A-t-il raison ?

(vi) On lance N dés à 6 faces non pipés. Quelle est la probabilité que la somme des faces soit paire ?

Exercice 6

Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de 99% (i.e. probabilité que le test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de 5% (probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, la fréquence de séropositivité est de 1/10000. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?

Exercice 7

Voici un article publié le 24 août 2011 par le Figaro.

```
Après avoir empoché 2,9 millions d'euros en 1996, un Montpelliérain très
chanceux a de nouveau décroché le jackpot au tirage du 27 juillet.

La probabilité qu'un tel événement se produise est infinitésimale et
pourtant : Pierre, un quinquagénaire de Montpellier qui souhaite rester
anonyme, a empoché pour la deuxième fois de sa vie la cagnotte du loto.
Il doit toucher de la part de la Française des Jeux un chèque d'un peu
plus de 3 millions d'euros pour le tirage du 27 juillet, après avoir
remporté un jackpot équivalent en avril 1996 (19 millions de francs,
soit 2,9 millions d'euros).
```

"J'ai une bonne étoile", a-t-il concédé. "Même si j'ai déjà vécu cette expérience, je la vis toujours avec la même joie et la même reconnaissance au destin", a confié l'homme sur Europe 1, tout en reconnaissant que ce gain lui avait fait moins d'effet. "La première fois, j'ai cru que j'allais avoir une syncope."

Il devrait cette fois utiliser son argent ≪pour assurer un patrimoine à ses deux enfants≫ après avoir perdu une grande partie de ses premiers gains en Bourse. L'homme est en effet un joueur invétéré. Chaque mois, il dépense plus d'un millier d'euros au loto, jouant toujours les mêmes combinaisons depuis la création du jeu en 1976.

Une chance sur 1,7 milliard
En ne jouant qu'une combinaison dans sa vie, un joueur a moins d'une chance sur 19 millions de remporter un tirage. Et il n'a qu'une chance sur 360 mille milliards d'empocher deux fois le gros lot s'il ne joue en tout et pour tout que deux fois dans son existence. En multipliant le nombre de combinaisons jouées (500 par mois pendant 35 ans), Pierre avait une chance sur 1,7 milliard de devenir un double gagnant du loto.

Si Pierre semble avoir décroché, de loin, le plus important ≪double gain≫ jamais enregistré, son histoire n'est pas unique en son genre. D'après la FDJ, un homme a remporté 675.000 euros en 1992 et 7 millions d'euros sept ans plus tard. C'est aussi le cas de Martine qui décrochait les six bons numéros en 2006 (ne touchant ≪que≫ 120.000 euros) avant de remporter 3 millions d'euros en 2009.

Un autre phénomène statistiquement incongru s'est réalisé en octobre 2010 en Israël : les six mêmes numéros sont tombés à seulement un mois d'intervalle (13, 14, 26, 32, 33 et 36). Seul le complémentaire différait. La direction du loto israélien avait cru sur le moment à un incident technique avant de se rendre à l'évidence.

En France, les règles du Loto ont changé : avant 2008, un tirage du Loto était composé de 6 numéros plus un numéro complémentaire, distincts deux à deux, et compris entre 1 et 49 (ces règles sont toujours en vigueur en Israël). Depuis 2008, il se compose de cinq numéros distincts compris entre 1 et 49 ainsi que d'un "numéro chance" compris entre 1 et 10.

1. Calculer la probabilité de gagner au Loto avant, puis après 2008. Commenter les probabilités données dans l'article.
2. Calculer la probabilité qu'avec deux tirages par semaine pendant un mois la même grille sorte deux fois. Recommencer, mais sur une période de 50 ans.
3. Calculer la probabilité qu'avait Pierre de gagner deux fois le gros lot (en tenant compte de son mode de jeu), puis donner la probabilité qu'il y ait en France un joueur qui gagne deux fois, en estimant grossièrement que la France compte un million de joueurs comme Pierre.

Exercice 8

Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant la même loi $\mathcal{B}(p)$ (Bernoulli de paramètre p) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1) Quelle est la loi du couple (U, V) ? En déduire les lois marginales.

2) Calculer la loi de U sachant $\{V = i\}$ pour $i \in \{0, 1\}$.

3) Les v.a. U, V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0 < p < 1$. On considère que n canaux de ce type sont en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres canaux. On note X_k le bit reçu en sortie du k-ième canal et X_0 le bit émis à l'entrée du premier canal.

1. Calculer la probabilité $P(X_k = 1 | X_{k-1} = 1)$ et $P(X_k = 1 | X_{k-1} = 0)$.
2. On note π_n le vecteur de coordonnées $[P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1)]$. Préciser la relation entre π_n et π_{n-1}.
3. En déduire π_n en fonction de π_0 puis l'expression de π_n en fonction de n et p.
4. Quelle est la probabilité que l'information émise à l'entrée du premier canal, soit fidèlement transmise par le canal n ? Que devient cette quantité quand $n \to +\infty$?