Correction de l'exercice 25 : Statistique d'ordre

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. On suppose (ça n'est pas précisé dans l'énoncé) que X_1 a une loi diffuse sur $\mathbb{R}$. Soit $1 \leq i < j \leq n$. On sait que $X_i - X_j = X_i + (-X_j)$ a également une loi diffuse, et donc $\mathbb{P}(X_i - X_j = 0) = 0$. Donc l'union finie de ces évènements pour tous les i et j est également de probabilité 0 :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq n}\{X_i = X_j\}\right) = 0.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= \mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\} \leq x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > x\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i\leq n}\{X_i > x\}\right) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(X_1 > x\right)\right)^n = 1-(1-F(x))^n. \end{aligned}$$
$$F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}\left(\max\{X_1,\ldots,X_n\} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i\leq n}\{X_i \leq x\}\right) = F(x)^n.$$

3. τ est une variable aléatoire à valeur dans l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. De plus, sa loi est invariante par n'importe quelle permutation, puisque celle de $(X_1,\ldots,X_n)$ l'est. τ suit donc une loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.
Un argument moins abstrait consiste à calculer $\mathbb{P}(\tau = \sigma)$ pour une permutation σ donnée : c'est
$$\mathbb{P}(\tau=\sigma) = \int_{x_{\sigma(1)}=-\infty}^{+\infty}\int_{x_{\sigma(2)}=x_{\sigma(1)}}^{+\infty}\ldots\int_{x_{\sigma(n)}=x_{\sigma(n-1)}}^{+\infty} dP(x_{\sigma(n)})\ldots dP(x_{\sigma(2)})\ldots dP(x_{\sigma(1)}),$$
que l'on peut calculer (ça vaut bien sûr $1/n!$) ou alors remarquer que c'est une une quantité qui ne dépend pas de σ.

4.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{(k)} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k}^{n}\left\{X_{(j)} \leq k < X_{(j+1)}\right\}\right) \\ &= \sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}\left(\left\{X_{(j)} \leq x < X_{(j+1)}\right\}\right) \\ &= \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\mathbb{P}\left(X_1 \leq x\right)^j\left(1-\mathbb{P}\left(X_1 \leq x\right)\right)^{n-j}. \end{aligned}$$
On peut dériver pour avoir la densité de $X_{(k)}$ en fonction de celle de X_1. On remarque que $\mathbb{P}\left(X_{(k)} \leq x\right) = \mathbb{P}(S \geq k)$ si $S \sim \mathcal{B}(n, F(x))$.

5. On a
$$F_\alpha^n(x) = \mathbb{P}\left(S \geq [\alpha n]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \geq \frac{[\alpha n]}{\alpha n}\alpha\right),$$
où $S \sim \mathcal{B}(n, F(x))$. Par la loi des grands nombres, on sait que quand n tend vers l'infini on $S/n \to F(x)$ presque sûrement et donc en probabilités ; par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$:

- si $x > x_\alpha$, $F(x) > F(x_\alpha) = \alpha$ et donc $\frac{[\alpha n]}{\alpha n}\alpha \leq \alpha < F(x) - \epsilon$ pour n assez grand, ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \geq \frac{[\alpha n]}{\alpha n}\alpha\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \geq F(x) - \epsilon\right) \to 1$$

  quand n tend vers l'infini.
- si $x < x_\alpha$, $F(x) < F(x_\alpha) = \alpha$ et donc $\frac{[\alpha n]}{\alpha n}\alpha \geq F(x) + \epsilon$, ainsi

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \geq \frac{[\alpha n]}{\alpha n}\alpha\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \geq F(x) + \epsilon\right) \to 0$$

  quand n tend vers l'infini.