Correction de l'exercice 34 : processus de Poisson et paradoxe de l'autobus

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(T_1, T_2, \ldots, T_n)] &= \mathbb{E}[h(S_1, S_1 + S_2 \ldots, S_1 + \cdots + S_n)] \\ &= \int_{[0,+\infty[^n} h(s_1, s_1 + s_2 \ldots, s_1 + \cdots + s_n)\lambda^n e^{-(s_1+s_2+\cdots+s_n)} ds_1 ds_2 \ldots ds_n.\end{aligned}$$

   On effectue le changement de variable suivant : $t_1 = s_1, t_2 = s_1 + s_2, \ldots, t_n = s_1 + \cdots + s_n$. L'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ associe $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont matrice triangulaire supérieure a des termes non nuls égaux à 1 : c'est donc un C^1-difféomorphisme de jacobien égal à 1 de $[0, +\infty[^n$ sur $\Delta = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(T_1, T_2, \ldots, T_n)] &= \int_{[0,+\infty[^n} h(s_1, s_1 + s_2 \ldots, s_1 + \cdots + s_n)\lambda^n e^{-\lambda(s_1+s_2+\cdots+s_n)} ds_1 ds_2 \ldots ds_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, t_2, \ldots, t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_\Delta(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n.\end{aligned}$$

   Conclusion : $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ la fonction :

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_\Delta(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une (nouvelle) fonction borélienne bornée. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(T_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} h(t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_\Delta(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n \\ &= \int_{t_n=0}^{\infty} h(t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_n \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} dt_{n-1} \int_{t_{n-2}=0}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_{t_3=0}^{t_4} dt_3 \int_{t_2=0}^{t_3} dt_2 \int_{t_1=0}^{t_2} dt_1 \\ &= \int_{t_n=0}^{\infty} h(t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_n \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} dt_{n-1} \int_{t_{n-2}=0}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_{t_3=0}^{t_4} dt_3 \int_{t_2=0}^{t_3} t_2 dt_2 \\ &= \int_{t_n=0}^{\infty} h(t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_n \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} dt_{n-1} \int_{t_{n-2}=0}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_{t_3=0}^{t_4} \frac{t_3^2}{2} dt_3 \\ &= \ldots \\ &= \int_{t_n=0}^{\infty} h(t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_n} \frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!} dt_n.\end{aligned}$$

   T_n admet donc par rapport à la mesure de Lebesgue la densité

$$f(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u).$$

   On reconnaît que T_n suit la loi $Gamma(n, \lambda)$, ce qui était d'ailleurs prévisible puisque qu'on sait que si $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des variables indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda) = Gamma(1, \lambda)$, leur somme suit une loi $Gamma(n \times 1, \lambda)$.

3. Soit $\omega \in \Omega$. Comme la suite $(T_n(\omega))_{n\geq 1}$ est croissante, la suite $\left(\mathbb{1}_{[0,t]}\left(T_n(\omega)\right)\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, et

$$\begin{aligned}
N_t(\omega) = k &\Leftrightarrow \forall n \in \{1,\dots,k\}, \mathbb{1}_{[0,t]}\left(T_n(\omega)\right) = 1 \text{ et } \forall n > k, \mathbb{1}_{[0,t]}\left(T_n(\omega)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \{1,\dots,k\}, T_n(\omega) \leq t \text{ et } \forall n > k, T_n(\omega) > t \\
&\Leftrightarrow T_k(\omega) \leq t \text{ et } T_{k+1}(\omega) > t.
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}.$$

4. Deux possibilités :
   - la première est de remarquer que $\mathbb{P}(T_k \leq t) = \mathbb{P}(T_k \leq t \text{ et } T_{k+1} > t) + \mathbb{P}(T_k \leq t \text{ et } T_{k+1} \leq t) = \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}) + \mathbb{P}(T_{k+1} \leq t)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_k \leq t) - \mathbb{P}(T_{k+1} \leq t) \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du - \int_0^u \frac{\lambda^{n+1}}{(n)!} u^n e^{-\lambda u} du \\
&= \int_0^t \left(\frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} - \frac{\lambda^{n+1}}{(n)!} u^n e^{-\lambda u} \right) du \\
&= \int_0^t d\left(\frac{\lambda^n}{n!} u^n e^{-\lambda u} \right) \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} t^n e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

   - Autre possibilité : on utilise l'indépendance T_n et S_{n+1} pour écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}) \\
&= \int_{(u,t)\in\mathbb{R}^2 : u \leq t < u+s} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda s} du ds \\
&= \int_{u=0}^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du \int_{s=t-u}^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_{u=0}^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} du \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_{u=0}^t u^{n-1} du \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

   Dans les deux cas, on reconnaît que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

5. On commence par définir T_0 pour que les relations $W_t = t - T_{N_t}$ et $Z_t = T_{N_t+1} - t$ définissent bien deux variables aléaoires sur tout Ω : conformément à l'intuition on prendra $T_0 = 0$. Pour cette question, trois façons possibles de mener les calculs :
   - On peut calculer la fonction de répartition du couple (W_t, Z_t). En fait, il est légèrement plus simple (et bien sûr équivalent) de s'intéresser, pour $(w,z) \in \mathbb{R}_+^2$, à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^\infty \{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\} \cap \{N_t = k\} \right) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\} \cap \{N_t = k\}\right)
\end{aligned}$$

par σ-additivité de $\mathbb{P}$. Or pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\} \cap \{N_t = k\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{T_k < (t-w)\mathbb{1}_{[0,t]}(w)\right\} \cap \{T_k + S_{k+1} > t+z\}\right) \\
&= \int_{(u,s)\in\mathbb{R}^2 : u \leq (t-w)\mathbb{1}_{[0,t]}(w), u+s>t+z} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda s} du ds \\
&= \int_{u=0}^{(t-w)\mathbb{1}_{[0,t]}(w)} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} du \int_{s=t+z-u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_{u=0}^{(t-w)\mathbb{1}_{[0,t]}} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t+z-u)} du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t+z)} \int_{u=0}^{(t-w)\mathbb{1}_{[0,t]}(w)} u^{k-1} du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t+z)} \frac{(t-w)^k}{k} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) \\
&= \frac{(\lambda(t-w))^k}{k!} e^{-\lambda(t+z)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w)
\end{aligned}$$

De plus, pour $k = 0$, si $N_t = 0$ on a $W_t = t$ et $Z_t = T_1 - t$ et donc :

$$\mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\} \cap \{N_t = 0\}\right) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)\mathbb{P}(T_1 > t+z) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x) e^{-\lambda(t+z)}.$$

Au total,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\}\right) &= \mathbb{1}_{[0,t]}(x) e^{-\lambda(t+z)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-w))^k}{k!} e^{-\lambda(t+z)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) \\
&= e^{-\lambda(t+z)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-w))^k}{k!} \\
&= \mathbb{1}_{[0,t]}(w) e^{-\lambda(t+z)} e^{\lambda(t-w)} \\
&= \mathbb{1}_{[0,t]}(w) e^{-\lambda(z+w)} \\
&= \mathbb{1}_{[0,t]}(w) e^{-\lambda w} \times e^{-\lambda z}.
\end{aligned}$$

On en déduit que W_t et Z_t sont indépendantes, que $Z_t \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et que $W_t \sim \lambda e^{-\lambda w} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw + e^{-\lambda t}\delta_t$, c'est-à-dire que la loi de W_t est celle d'une variable $\mathcal{E}(\lambda)$ tronquée en t.

- Variante : on remarque que pour $0 \leq w \leq t$, $z \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{W_t > w\} \cap \{Z_t > z\} | N_{t-w} = n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(T_n + w < t < T_n + S_{n+1} - z\right)}{\mathbb{P}(N_{t-w} = n)} \\
&= \frac{\int_{u=0}^{t-w} \int_{s=t-u+z}^{\infty} \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda s} du ds}{\mathbb{P}(N_{t-w} = n)} \\
&= \frac{\int_{u=0}^{t-w} \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u+z)} du}{\mathbb{P}(N_{t-w} = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+z)}(\lambda(t-w))^n/n!}{e^{-\lambda(t-w)}(\lambda(t-w))^n/n!} \\
&= e^{-\lambda z} e^{-\lambda w},
\end{aligned}$$

  et on conclut de la même manière. Au passage, un tel argument permet de montrer que $S_{N_t+1} - t \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (penser que la loi exponentielle est sans mémoire), et que par conséquent pour tout $x > 0$ la variable $N_{t+x} - N_t$ a même loi que $N_{t+x-t} = N_x \sim \mathcal{P}(\lambda x)$.
- Autre possibilité : soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive, on a par le théorème de Fubini-Tonnelli

$$\mathbb{E}[h(W_t, Z_t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[h(W_t, Z_t)\mathbb{1}_{N_t = k}].$$

Or pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(W_t, Z_t)\mathbb{1}_{N_t=k}] &= \mathbb{E}[h(W_t, Z_t)\mathbb{1}_{T_k \leq t \leq T_k + S_{k+1}}] \\
&= \int_{u=0}^{t} \int_{s=t-u}^{\infty} h(t-u, u+s-t) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda s} du ds \\
&= \int_{w=0}^{t} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} (t-w)^{k-1} e^{-\lambda(z+t)} dw dz \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \frac{(\lambda(t-w))^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^2 e^{-\lambda(z+t)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz
\end{aligned}$$

grâce au changement de variable $u = t - w$ et $u + s = z + t$. Ainsi, en appliquant à nouveau le théorème de Fubini-Tonnelli on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[h(W_t, Z_t)\mathbb{1}_{N_t=k}] &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \frac{(\lambda(t-w))^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^2 e^{-\lambda(z+t)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda(t-w))^{k-1}}{(k-1)!} \right) \lambda^2 e^{-\lambda(z+t)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) e^{\lambda(t-w)} \lambda^2 e^{-\lambda(z+t)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \lambda^2 e^{-\lambda(z+w)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz.
\end{aligned}$$

De plus, comme sur l'évènement $\{N_t = 0\}$ on a $W_t = t$ et $T_1 = S_1 > t$,

$$\mathbb{E}[h(W_t, Z_t)\mathbb{1}_{N_t=0}] = \int_{w=0}^{\infty} \int_{s=t}^{\infty} h(w, s-t) \lambda e^{-\lambda s} ds \delta_t(w) = \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \lambda e^{-\lambda(z+t)} dz \delta_t(w).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(W_t, Z_t)] &= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \lambda e^{-\lambda(z+t)} dz \delta_t(w) + \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \lambda^2 e^{-\lambda(z+w)} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw dz \\
&= \int_{w=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} h(w, z) \lambda e^{-\lambda z} dz \left(\lambda e^{-\lambda w} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw + e^{-\lambda t} \delta_t(w) \right),
\end{aligned}$$

et on retrouve la même conclusion : W_t et Z_t sont indépendantes, $Z_t \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $W_t \sim \lambda e^{-\lambda w} \mathbb{1}_{[0,t]}(w) dw + e^{-\lambda t} \delta_t$, c'est-à-dire que la loi de W_t est celle d'une variable $\mathcal{E}(\lambda)$ tronquée en t.

6. cf point précédent. En fait, comme la loi des durées inter-arrivées est $\mathcal{E}(\lambda)$ et donc sans mémoire, il était attendu que la loi de Z_t soit aussi $\mathcal{E}(\lambda)$. On remarque en particulier que $\mathbb{E}[Z_t] = 1/\lambda$ et que

$$\mathbb{E}[W_t] = \int_{w=0}^{t} w \lambda e^{-\lambda w} dw + t e^{-\lambda t} = \left[-w e^{-\lambda w} \right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda w} dw + t e^{-\lambda t} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

7. Il peut paraître surprenant que l'intervalle entre les deux instants d'arrivée qui entourent le temps t soit de longueur $S_{N_t+1} = W_t + Z_t$ significativement plus grande qu'une durée d'inter-arrivées S_k "générique". En particulier, son espérance $\mathbb{E}[W_t + Z_t] = (2 - e^{-\lambda t})/\lambda$ est presque deux fois plus grande que $\mathbb{E}[S_k] = 1/\lambda$ quand t devient grand devant $1/\lambda$. Cela s'explique intuitivement par le fait que S_{N_t+1} n'est *pas n'importe quelle* durée d'inter-arrivées : le fait de savoir qu'elle contient t augmente ses chances d'être plus grande ; autrement dit, un intervalle d'inter-arrivée S_k a plus de chance de contenir l'instant t s'il est plutôt plus grand que les autres.