Correction de l'exercice 49 : Not Seven

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ muni de la loi uniforme ; S est la variable aléatoire définie pour $\omega \in \Omega$ par $S(\omega) = \omega_1 + \omega_2$.
   - pour $2 \leq k \leq 7$, on a
   $$\{S = k\} = \bigcup_{j=1}^{k-1} \{(j, k-j)\}$$
   et donc $\mathbb{P}(S = k) = (k-1)/36$;
   - pour $7 \leq k \leq 12$, on a
   $$\{S = k\} = \bigcup_{j=k-6}^{6} \{(j, k-j)\}$$
   et donc $\mathbb{P}(S = k) = (6 - (k-6) + 1)/36 = (13-k)/36$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\{\tau = k\} = \{S_n = 7\} \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \{S_j \neq 7\},$$
   donc par indépendance des $(S_j)_{j \geq 1}$ on a
   $$\mathbb{P}(\tau = k) = \mathbb{P}(S_n = 7) \prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(S_j \neq 7) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$
   Ainsi, τ suit une loi géométrique de paramètre $1/6$.
3. $$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{g'(5/6)}{6},$$
   où g est la fonction définie par $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$, de dérivée $g'(x) = (1-x)^{-2}$. Donc $E[\tau] = \frac{1}{6} \times (1 - 5/6)^{-2} = 6$.

4. Un initié joue jusqu'à ce que le résultat du prochain lancer soit 7. Son gain est donc
$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \mathbb{1}_{\{\tau > k\}}.$$
5. Montrons d'abord un petit lemme qui nous aidera par la suite :

   Lemme 1 *Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie à valeur dans $\mathbb{N}$. On a*
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[X|Y=k\right] \mathbb{P}(Y=k).$$
   En effet,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[X|Y=k\right] \mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}\left(X=j|Y=k\right)\mathbb{P}(Y=k)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X=j, Y=k\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}\left(X=j\right)\\ &= \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$
   On a utilisé la relation $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{X=j, Y=k\} = \{X=j\}$. L'interversion des deux sommes est autorisée par la sommabilité des $j\mathbb{P}(X=j, Y=k)$. Grâce à ce lemme, on peut calculer l'espérance du gain du joueur initié :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} S_k \mathbb{1}_{\{\tau>k\}}\right] && (1)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_k \mathbb{1}_{\{\tau>k\}}\right] && (2)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[S_k|\tau>k\right]\mathbb{P}\left(\tau>k\right) && (3)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^k && (4)\\ &= 7 \times \frac{5/6}{1-5/6} = 35\end{aligned}$$

(1) : par définition de Y ;

(2) : par linéarité de l'espérance ;

(3) : par application du lemme 1 avec $X = S_k \mathbb{1}_{\{\tau > k\}}$ et $Y = \mathbb{1}_{\{\tau > k\}}$.

(4) : car l'indépendance des S_j deux-à-deux implique que $\mathbb{E}[S_k|\tau > k] = \mathbb{E}[S_k|S_k \neq 7]$, et par application du lemme 1 à $X = S_k$ et $Y = \mathbb{1}_{\{S_k \neq 7\}}$:

$$\begin{aligned} 7 = \mathbb{E}[S_k] &= \mathbb{E}[S_k|S_k \neq 7]\mathbb{P}(S_k \neq 7) + \mathbb{E}[S_k|S_k = 7]\mathbb{P}(S_k = 7) \\ &= \mathbb{E}[S_k|S_k \neq 7]\,(1 - \mathbb{P}(S_k = 7)) + 7\mathbb{P}(S_k = 7), \end{aligned}$$

soit $\mathbb{E}[S_k|S_k \neq 7] = 7$.

6. On a $X_{n+1} = (X_n + S_{n+1})\,\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = i] &= \mathbb{E}\left[(X_n + S_{n+1})\,\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}|X_n = i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(i + S_{n+1})\,\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] \\ &= i\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] + \mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] \\ &= i\mathbb{P}\left(S_{n+1} \neq 7\right) + \mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] \\ &= i \times \frac{5}{6} + \frac{35}{6}, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} 7 = \mathbb{E}\left[S_{n+1}\right] &= \mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] + \mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} = 7\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] + 7\mathbb{P}\left(S_n = 7\right), \end{aligned}$$

soit $\mathbb{E}\left[S_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \neq 7\}}\right] = 7 - 7/6 = 35/6$. D'après le lemme 1 appliqué à $X = X_{n+1}$ et $Y = X_n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}] &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_n = i\right]\mathbb{P}\left(X_n = i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{35}{6} + i \times \frac{5}{6}\right)\mathbb{P}\left(X_n = i\right) \\ &= \frac{35}{6} + \frac{5}{6}\sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}\left(X_n = i\right) \\ &= \frac{35}{6} + \frac{5}{6}\mathbb{E}[X_n]. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[X_0] = 0$, on en déduit facilement que

$$\mathbb{E}[X_n] = 35\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \to_{n\to\infty} 35.$$

Ainsi, en décidant à l'avance de s'arrêter au bout du $n = 50$-ème lancer, le joueur a une espérance de gain supérieure à $34,99$.