Correction de l'exercice 31 : simulation par la méthode d'inversion

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. Pour comprendre à quoi correspond F_X^{-1} il faut faire le dessin d'une fonction de répartition présentant des plateaux et des sauts. Montrons que pour tout $u \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_X^{-1}(u) \leq x \iff u \leq F_X(x).$$
Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : F_X(y) \geq u\}$.
   - Montrons d'abord que
   $$A = [F_X^{-1}(u), +\infty[.$$
   Comme F est croissante, $y \in A$ et $z \geq y$ implique $F_X(z) \geq F_X(y) \geq u$ et donc $z \in A$; il existe par conséquent $t \in \mathbb{R}$ tel que soit $A = [t, +\infty[$, soit $A =]t, +\infty[$. Comme F est continue à droite, $F(t) = \lim_{y \to t^+} F(y) \geq u$ donc $t \in A$. Ainsi, $A = [t, +\infty[$, et $F_X^{-1}(u) = \inf A = t$.
   - Si $F_X^{-1}(u) \leq x$, alors vue la forme de A on a $x \in A$ et donc $F_X(x) \geq u$;
   - Si $u \leq F_X(x)$, alors $x \in A$ et donc $x \geq \inf A = F_X^{-1}(u)$.

   La conclusion est très facile : si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et si $Y = F_X^{-1}(U)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x),$$
donc Y a même loi que X.
2. La loi exponentielle de paramètre λ a pour fonction de répartition $F : x \to 1 - e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}^+$, d'où $F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$. Ainsi, pour simuler une variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ à partir d'une variable U uniforme sur $[0,1]$, il suffit de prendre $X = -\log(1-U)/\lambda$ ou même
$$Y = -\frac{1}{\lambda}\log(U),$$
qui a même loi puisque U et $1-U$ ont même loi.
3. La loi de Cauchy a pour densité $f(x) = \left(\pi(1+x^2)\right)^{-1}$, donc pour fonction de répartition
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$
D'où
$$F_X^{-1}(x) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right).$$
Noter que la loi de Cauchy, bien que symétrique autour de 0, n'a pas d'espérance.