Correction de l'exercice : le maximum ou les deux autres

Telecom ParisTech

26 novembre 2010

Enoncé

Alice joue au jeu suivant :
- elle choisit l'option 1 ou l'option 2 ;
- elle tire trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, X_3 uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$;
- si elle a choisi l'option 1, elle gagne le maximum M des trois valeurs tirées ;
- si elle a choisi l'option 2, elle gagne la somme P des deux plus petites valeurs tirées.

Elle se demande quelle option est la plus avantageuse.

1. Quelle est la loi de M ?
2. Calculer l'espérance de M, puis celle de P.
3. Quelle option lui conseillez-vous ? On pourra comparer les variances de M et de P.

Correction

1. Pour $0 \leq t \leq 1$,
$$P(M \leq t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{3}\{X_i \leq t\}\right) = \prod_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(X_i \leq t\right) = t^3 \ .$$
M a donc pour densité $f_M(t) = 3t^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

2. $\mathbb{E}[M] = \int_0^1 t \times 3t^2 dt = 3/4$, et $\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3 - M] = 3/2 - 3/4 = 3/4$.

3. À espérance égale, la préférence d'Alice se fera sur la variance : si elle aime le risque, elle choisira l'option ayant la plus grande, à l'inverse si elle veut assurer ses gains elle choisira l'option la plus concentrée autour de son espérance.
La variance de M est facile à calculer : $\mathbb{E}[M^2] = \int_0^1 t^2 \times 3t^2 dt = 3/5$, donc
$$\mathbb{V}ar(M) = 3/5 - (3/4)^2 = 3/80 \ .$$
Mais pour la variance de P, c'est plus compliqué. Voici deux possibilités :
   - La plus directe : on calcule la loi de P, et on en déduit la variance. Pour cela, soit h une fonction réelle borélienne positive. On a :
$$\begin{aligned}
E\left[h(P)\right] &= 6\mathbb{E}[h(P)\mathbb{1}_{\{X_1<X_2<X_3\}}] \\
&= 6\int_{x_1=0}^{1}\int_{x_2=x_1}^{1} h(x_1+x_2)\int_{x_3=x_2}^{1} dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= 6\int_{x_1=0}^{1}\int_{s=2x_1}^{1+x_1} h(s)\int_{x_3=s-x_1}^{1} dx_3 ds dx_1 \\
&= 6\int_{s=0}^{2} h(s)\int_{x_1=\max(s-1,0)}^{s/2} (1-s+x_1) dx_1 ds \\
&= 6\int_{s=0}^{1} h(s)\int_{x_1=0}^{s/2}(1-s+x_1)dx_1 ds + 6\int_{s=1}^{2} h(s)\int_{x_1=s-1}^{s/2}(1-s+x_1)dx_1 ds \\
&= 6\int_{0}^{1} h(s)\left\{\frac{s(1-s)}{2}+\frac{s^2}{8}\right\} ds + 6\int_{s=1}^{2} h(s)\left\{\left(\frac{s}{2}-s+1\right)(1-s)+\frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{4}-(s-1)^2\right)\right\} ds \\
&= \int_0^1 h(s)\times 3s\left(1-\frac{3s}{4}\right) ds + \int_0^1 h(s)\times\frac{3}{4}(2-s)^2 ds \ .
\end{aligned}$$
     La densité de P est donc $f_P(s) = 3s\,(1-3s/4)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(s) + \frac{3}{4}(2-s)^2\mathbb{1}_{[1,2]}(s)$: on peut vérifier qu'elle est continue, de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, et qu'elle admet un maximum en $s = 2/3$.
     On peut retrouver ainsi que $\mathbb{E}[P] = \int_0^2 s f_P(s) ds = 3/4$, et le calcul donne $\mathbb{V}ar(P) = 11/80$: la variance de P est donc beaucoup plus grande que celle de M.
   - Si on veut s'épargner le calcul de la loi, on peut se douter a priori que la variance de P (qui varie entre 0 et 2) est plus grande, et on peut essayer de le montrer sans la calculer. On utilise :
$$3 \times \frac{1}{12} = \mathbb{V}ar(S) = \mathbb{V}ar(P+M) = \mathbb{V}ar(P) + \mathbb{V}ar(M) + 2\mathbb{C}ov(M,P) \ .$$
     L'inégalité de Cachy-Schwarz donne $\mathbb{C}ov(M,P) \leq \sqrt{\mathbb{V}ar(M)\mathbb{V}ar(P)}$ et donc, en prenant $\alpha = (\mathbb{V}ar P/\mathbb{V}ar(M))^2$ et utilisant $\mathbb{V}ar(M) = 3/80$,
$$\frac{20}{3} \leq \alpha^2 + 1 + 2\alpha = (\alpha+1)^2 \ .$$
     On en déduit que $\alpha > \sqrt{20/3} - 1 > 1.58$, et donc que $\mathbb{V}ar(P) > 2.5\mathbb{V}ar(M)$, ce qui suffit (largement) à conclure. Le calcul exact de la variance ci-dessus montre qu'en fait $\mathbb{V}ar(P) = 11/3\,\mathbb{V}ar(M) \approx 3.67\,\mathbb{V}ar(M)$.