Correction de l'exercice 29

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} dx \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{a+n-1} dx \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{a+n-1} \frac{1}{\lambda} du \\
&= \frac{1}{\lambda^n \Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(a+n)-1} du \\
&= \frac{1}{\lambda^n \Gamma(a)} \Gamma(a+n) \\
&= \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{\lambda^n}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on trouve $\mathbb{E}[X] = a/\lambda$. De plus,

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}.$$

2. Soit $T :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,1[$ l'application qui à (x,y) associe $(x+y, x/(x+y))$.
   - elle est bien définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$;
   - elle est bijective, d'application réciproque $T^{-1}(u,v) = (uv, u(1-v))$;
   - La matrice jacobienne de T^{-1} est

   $$J_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{pmatrix},$$

   et la valeur absolue du jacobien est donc

   $$|\det J_{T^{-1}}| = |-uv - (1-v)u| = u$$

   qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times]0,1[$.

   $\Longrightarrow$ T est donc bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

   Soit $(U,V) = T(X,Y)$. Pour tout fonction mesurable positive $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} e^{-\lambda y} y^{b-1} dx\, dy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} dx\, dy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(u,v) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda u} (uv)^{a-1} \left(u(1-v)\right)^{b-1} u du\, dv \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h(u,v) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda u} u^{a+b-1} \frac{\gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} v^{a-1} (1-v)^{b-1} du\, dv.
\end{aligned}$$

Le couple (U, V) admet donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ qui est égale à

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}e^{-\lambda u}u^{a+b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(v)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}v^{a-1}\left(1-v\right)^{b-1} \\ &= f_U(u)f_V(v), \end{aligned}$$

avec

$$f_U(u) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}e^{-\lambda u}u^{a+b-1}$$

et

$$f_V(v) = \mathbb{1}_{[0,1]}(v)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}v^{a-1}\left((1-v)\right)^{b-1}.$$

Les variables U et V sont donc indépendantes, et U suit une loi Gamma$(a+b, \lambda)$.

3. Comme f_V est une densité de probabilité, on a

$$\int f_V(v)dv = \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}v^{a-1}\left(1-v\right)^{b-1}dv = 1,$$

et donc

$$\int_0^1 v^{a-1}\left((1-v)\right)^{b-1}dv = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Remarque : la loi de V est appelée “Loi Beta(a, b)” et est également très utile. On pourra calculer son espérance et sa variance à titre d'exercice, après avoir dessiné le graphe de sa densité.