Correction de l'exercice : la cerise sur le gâteau

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

Une cerise est placée sur la circonférence d'un gateau rond que l'on partage en deux au hasard en pratiquant deux découpes suivant des rayons. Si on prend la position de la cerise comme origine des angles, les positions U et V des deux coups de couteau sont des variables uniformément sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes.

1. Exprimer la taille T de la part contenant la cerise en fonction de U et de V.
2. Calculer son espérance et la probabilité qu'elle soit plus grosse que l'autre.
3. Quelle doit être la position d'un gourmand qui doit choisir entre la part avec la cerise et la part sans la cerise, avant le découpage ?

Corrigé :

[qu. 1] Si $0 \leq U \leq V \leq 2\pi$ alors la part qui contient l'origine (la cerise) est de taille $2\pi - (V-U)$. Si $0 \leq V \leq U \leq 2\pi$ alors la taille est $2\pi - (U-V)$. Donc la taille de la part est

$$2\pi - |U-V|\,.$$

[qu. 2] • Pour calculer son espérance, il faut la loi du couple (U,V). Comme les v.a. sont indépendantes, la loi du couple est égale au produit des lois marginales donc la loi du couple a pour densité

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \ \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(u)\ \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)$$

L'espérance de la part est donc

$$\mathbb{E}\left[2\pi - |U-V|\right] = 2\pi - \mathbb{E}\left[|U-V|\right] = 2\pi - \mathbb{E}\left[(U-V)\ \mathbb{1}_{U-V\geq 0}\right] - \mathbb{E}\left[(V-U)\ \mathbb{1}_{U-V<0}\right].$$

Calculons la première espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(U-V)\ \mathbb{1}_{U-V\geq 0}\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} (u-v)\mathbb{1}_{u-v\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \ \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(u)\ \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)\ du\ dv \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{[0,2\pi]^2} (u-v)\mathbb{1}_{u\geq v}\ du\ dv = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^u (u-v)\ dv\ du\end{aligned}$$

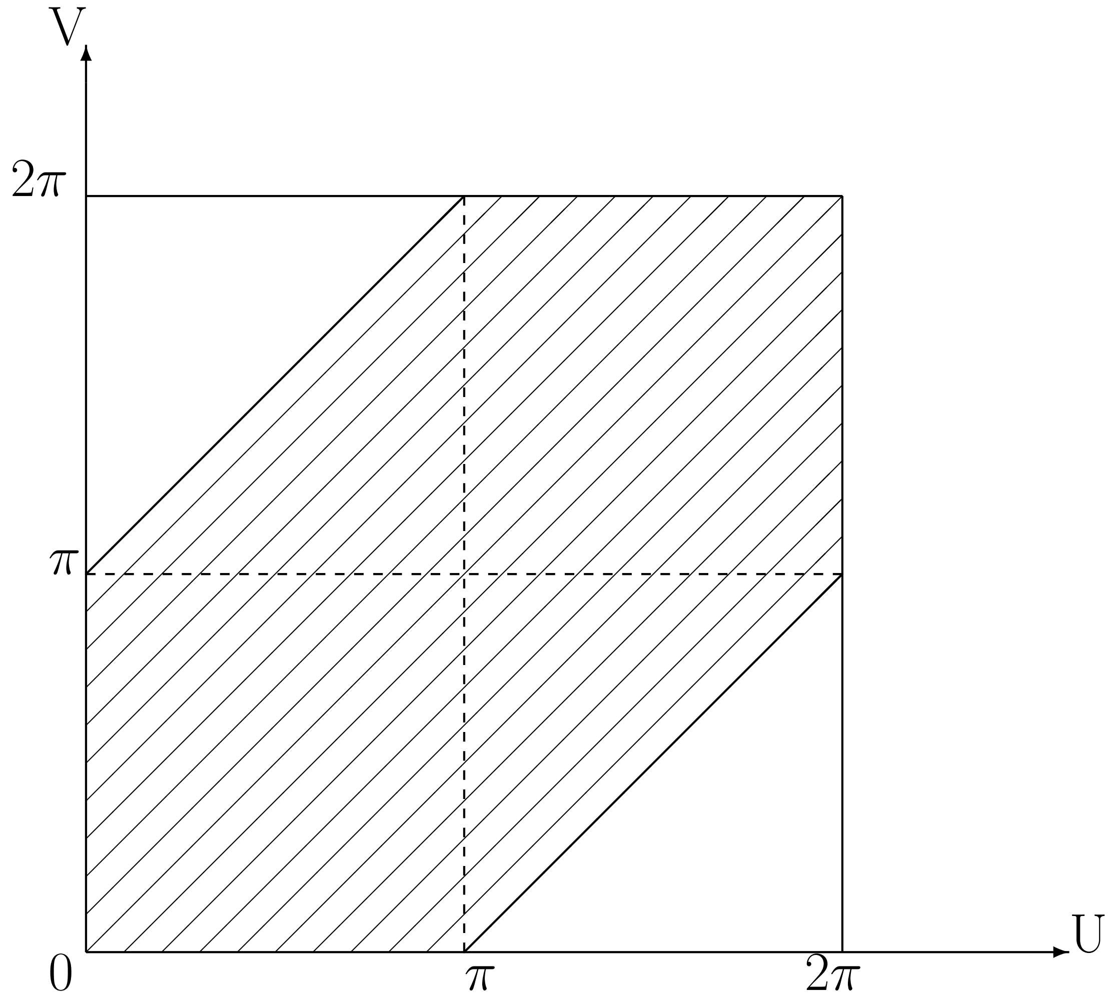
Par symétrie, la seconde espérance vaut aussi $\pi/3$. Donc

$$\mathbb{E}\left[2\pi - |U-V|\right] = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

• On cherche $\mathbb{P}\left(2\pi - |U-V| \geq \pi\right)$, soit encore $\mathbb{P}(\pi \geq |U-V|)$. En utilisant un argument de symétrie on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\pi \geq |U-V|) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\pi \geq |U-V|}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\pi \geq U-V, U \geq V}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\pi \geq V-U, V \geq U}\right] \\
&= 2 \int \mathbb{1}_{\pi \geq u-v, u \geq v} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(u)\ \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)\ du\ dv \\
&= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} dv \int_v^{(2\pi)\wedge(v+\pi)} du \\
&= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\pi} dv \int_v^{v+\pi} du + 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_\pi^{2\pi} dv \int_v^{2\pi} du \\
&= 2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

On peut aussi obtenir le résultat en décrivant $\{(u,v) \in [0,2\pi]^2 : \pi \geq |u-v|\}$: c'est l'ensemble hachuré sur le graphe ci-dessous. Il est facile de voir que sa probabilité est $3/4$.



[qu. 3] Le gourmand espère avoir la part la plus grosse. Or la probabilité que cette part soit celle qui contienne la cerise est $3/4$. Donc il doit répondre qu'il préfère prendre la part avec la cerise.