Correction de l'exercice 18 : Castor et Pollux se recontrent uniformément

MDI 101 - Probabilités - Groupe 5

1. Soit X l'heure d'arrivée (pm) de Castor, et Y l'heure d'arrivée de Pollux. L'énoncé suggèrent que X et Y suivent tous deux une loi uniforme sur $[0,1]$ et sont indépendants.
   L'évènement A "Castor et Pollux se recontrent" est égal à $\{|X-Y| \leq 1\}$. Sa probabilité est égale à l'aire de la zone du plan correspondante rapportée à celle du carré, c'est-à-dire
$$P(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$
2. Si X et Y ne se rencontrent pas, ils attendent tous les deux dix minutes. Sinon, Castor attend seulement s'il arrive en premier :
$$W = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{\bar{A}} + (Y-X)\mathbb{1}_{0 \leq Y-X \leq \frac{1}{6}}.$$
3. Soit h une fonction continue bornée, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(W)\right] &= h\left(\frac{1}{6}\right)\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) + h(0)\mathbb{P}\left(0 \leq X-Y \leq \frac{1}{6}\right) + \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{(x+\frac{1}{6})\wedge 1} h(y-x)dydx \\
&= \frac{25}{36}h\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{11}{72}h(0) + \int_{x=0}^{1}\int_{t=0}^{\frac{1}{6}\wedge 1-x} h(t)dt \\
&= \frac{25}{36}h\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{11}{72}h(0) + \int_{t=0}^{\frac{1}{6}} h(t)\int_{x=0}^{1-t} dxdt \\
&= \frac{25}{36}h\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{11}{72}h(0) + \int_{t=0}^{\frac{1}{6}} h(t)(1-t)dt
\end{aligned}$$
   La loi de W est donc :
$$dP_W = (1-t)\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{6}[}dt + \frac{11}{72}\delta_0 + \frac{25}{36}\delta_{\frac{1}{6}}.$$
4. $$\mathbb{E}[W] = \int_0^{\frac{1}{6}} t(1-t)dt + \frac{25}{36}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2\times 6^2} - \frac{1}{3\times 6^3} + \frac{25}{6^3} = \frac{9-1+75}{3\times 6^3} = \frac{83}{218}.$$
5. Pour $t \in [0,/6]$, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(W > t \middle| |Y-X| \leq \frac{1}{6}\right) &\leq \frac{\mathbb{P}\left(X+t < Y \leq X+\frac{1}{6}\right)}{\mathbb{P}\left(|Y-X| \leq \frac{1}{6}\right)} \\
&= \frac{\int_{x=0}^{1-t}\int_{y=x+t}^{(x+\frac{1}{6})\wedge 1} dydx}{\frac{11}{36}} \\
&= \frac{36}{11}\int_{x=0}^{1-t}\left(\frac{1}{6}-t\right)\wedge(1-t-x)\,dx \\
&= \frac{36}{11}\left(\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}-t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-t\right)^2\right) = \frac{1-6t}{22}\left(11-6t\right).
\end{aligned}$$
   La loi de W sachant A est donc $1/2\delta_0 + 36(1-t)/11\mathbb{1}_{[0,1/6[}(t)dt$.