TD 5 : Intégration, séries de fonctions

1 Objectifs

- Compte tenu de l'important retard pris par beaucoup dans les TD précédents, il est proposé pour cette séance de reprendre les exercices non traités dans les TD 1 à 4.
- Les exercices proposés ici sont donc plus durs ; ils demandent de la réflexion et sûrement des explications complémentaires que je donnerai à l'oral, au tableau ou sur demande.
- Il s'agit dans la première partie d'exhiber des méthodes d'intégrations numériques efficaces et réellement utilisées en pratique, et dans une deuxième partie d'étudier des fonctions continues un peu particulières.

2 Méthodes d'intégration de Newton-Cotes

Pour l'intégration numérique d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, la méthode de Newton-Cotes d'ordre d à n points procéde ainsi :

- `Etape 1 :` On divise $[a, b]$ en n sous-intervalles identiques $I_k = [a_k, a_{k+1}], 0 \leqslant k < n$.
- `Etape 2 :` Sur chacun des I_k, on remplace f par un polynôme P_k l'interpolant en d points et on calcule $i_k = \int_{I_k} P_k$.
- `Etape 3 :` Le résultat proposé est alors $i_{d,n} = \sum_{k=0}^{n-1} i_k$.

1. Montrer que si $d \geqslant 1$, $i_{d,n} \to \int_{[a,b]} f$ quand $n \to \infty$.
2. On précise maintenant l'étape 2 en supposant provisoirement $I_k = [0, 1]$ et en choisissant les d points $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$ uniformément répartis dans $[0, 1]$. Soit $y_j = f(x_j), 1 \leqslant j \leqslant d$ et $Y = (y_j)_{1 \leqslant j \leqslant d}$.
   Montrer que l'application $Y \to i_k$ est une forme linéaire et calculer sa matrice (qui est donc un vecteur ligne).
   Indication : pour tout k compris entre 0 et $d-1$, l'intégration est exacte pour $x \to x^k$ ce qui se traduit par
   $$\sum_{j=1}^{d} w_j x_j^k = \int_{[0,1]} x^k dx$$
3. En déduire une fonction *integre* prenant en argument f, a, b, n et d qui calcule l'intégrale de f de a à b selon la méthode de Newton-Cotes d'ordre d à n points. Représenter simultanément l'erreur commise sur une fonction test en fonction du nombre de points par les méthodes d'ordre 1, 2, 4, 6 et 8.

3 Trois fonctions inhabituelles

3.1 Une fonction continue nulle part dérivable

On définit la fonction $h : x \to 1/2 - |x - E(x) - 1/2|$ puis la fonction

$$f_n : x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h(4^k x)}{4^k}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une limite f dont on montre que f n'est nulle part dérivable. Dessiner f_5 et donner une majoration la $||f - f_5||_\infty$.

3.2 Deux fonctions continues presque partout dérivables, de dérivées presque partout nulle

1. Dessiner un triangle équilatéral.
2. On note $T_{k,n} = [k3^{-n}, (k+1)3^n], 0 \leqslant k < 3^n$ les intervalles triadiques sur $[0,1]$;
   En partant de $d_0 = Id_{|[0,1]}$, on construit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'homéomorphismes croissants de $[0,1]$ sur lui-même affines sur tous les $T_{k,n}$ et tels que d_{n+1} coïncide avec d_n sur les extrémités des $T_{k,n}$ et soit constante sur le tiers central de ceux-ci.
   (a) Montrer cette suite converge uniformément vers une limite appelée *escalier du diable*.
   (b) Ecrire une procédure permettant de passer de la liste des points $(k3^{-n}, d_n(k3^{-n}))$ à la liste des points $(k3^{-(n+1)}, d_{n+1}(k3^{-(n+1)}))$.
   (c) Représenter graphiquement d_6.
3. On note $D_{k,n} = [k2^{-n}, (k+1)2^n], 0 \leqslant k < 2^n$ les intervalles dyadiques sur $[0,1]$, on désigne par r la fonction de Rademacher 1-périodique valant 1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et -1 sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et on définit $r_n : x \to r(2^n x)$
   $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des homéomorphismes croissants de $[0,1]$ sur lui-même affines sur les $D_{k,n}$ telle que $d_{n+1}((k+\frac{1}{2})2^{-n}) = \frac{1}{3}d_n(k2^{-n}) + \frac{2}{3}d((k+1)2^{-n})$.
   (a) Représenter h_6.
   (b) Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h strictement croissante donc dérivable presque partout.
   (c) Montrer que $h'_n(x) = \left(1 + \frac{1}{3}r_0(x)\right)\left(1 + \frac{1}{3}r_1(x)\right) ... \left(1 + \frac{1}{3}r_{n-1}(x)\right)$
   (d) En interprétant $r_n(x)$ comme le énième chiffre de l'écriture en base 2 de x, expliquer pourquoi $h'_n(x) \to 0$ presque partout.
   En fait, ce résultat découle de la loi forte des grands nombres, résultat non trivial de théorie des probabilités dont on peut avoir l'intuition : une version suffisante ici assure que la moyenne de Césaro d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées bornées tend presque sûrement vers leur espérance commune.
   (e) En déduire que presque partout, la dérivée de h existe et est nulle.