TD 1 : Polynômes, interpolation, phénomène de Runge

1 Objectifs

- Révision des commandes MAPLE de base.
- Utilisation de l'aide en ligne.
- Manipulations élémentaires des listes et des séquences.
- Maîtrise des boucles simples avec `for`.
- Syntaxes raccourcie et classique des fonctions.

Au niveau mathématique, une bonne connaissance des polynômes d'interpolation de Lagrange sera nécessaire. On découvrira expérimentalement à quoi ils peuvent servir, quelles sont leurs limites et comment les utiliser au mieux.

2 Interpolation de Lagrange

1. (facile) Ecrire une procédure prenant en entrée une liste et calculant le produit de ses éléments.
2. (plus dur) En déduire une procédure prenant en entrée deux listes de même longueur de points lx et ly et calculant le polynôme passant par tous les points $(lx[i], ly[i])$.

3 Phénomène de Runge

1. (facile) Ecrire une procédure prenant en arguments x_{min}, x_{max} et N qui retourne la liste des $N+1$ points uniformément répartis entre x_{min} et x_{max}.
2. (très facile) Ecrire avec la syntaxe rapide la fonction

   $$runge : x \to \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$$

   Dans la suite, on prendra pour les applications numériques $\alpha = \frac{1}{4}$, sauf mention contraire.
3. (moyen) Dessiner en même temps la fonction $runge$ et son interpolant sur N points uniforméments répartis entre -1 et 1 pour différentes valeurs de N. Que remarque-t-on ?
4. (à peu près pareil) Faire la même chose avec au lieu des points uniformément distribués les points $\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), 0 \leqslant k \leqslant N$. Que se passe-t-il ? Et si l'on essaye pour des valeurs de α plus petites ?

4 Polynomes orthogonaux

Interpoler une fonctions en certains points est une chose, la représenter correctement en est une autre : c'est ce qu'ont montré les parties précédentes. Il existe des methodes bien plus puissantes pour approcher des fonctions que des methodes d'interpolation : c'est notamment une utilisation possible des polynômes orthogonaux.

5. (facile) Regarder ce que contient le package `orthopoly`, et comment il s'utilise.
6. (moyen) Projeter la fonction *runge* sur l'espace des polynômes de Legendre (puis de Chebishev) de degré plus petit que 20, et commenter la qualité du résultat selon la valeur de α.
7. (difficile) En fait, la difficulé vient de ce que la fonction *runge* a un pôle (son dénominateur a un zéro) proche de l'origine. Pour contourner cette difficulté, essayer de mettre au point une méthode d'interpolation par des fractions rationnelles.