TD 3 : Intégration

1 Objectifs

- Utilisation de int, applications.
- Algorithmes numériques élémentaires.
- Exploration des possibiltés de la fonction plot.

Dans ce TP, on se propose d'étudier les possibilités symboliques, puis numériques apportées par Maple.

Le dernier exercice expose un moyen de dessiner la plus célèbre des courbes fractales : l'ensemble de Mandelbrot.

2 Intégration symbolique

2.1 Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx$$

2.2 Fonction Γ d'Euler

Etudier la fonction

$$\Gamma : x \to \int_{0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2.3 Primitives de fractions rationnelles

Déterminer les réels a, b et c pour lesquels les primitives de la fonction réelle f de variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{ax^8 + bx^7 + c}{(x-1)^3(x+2)^5}$$

soient des fractions rationnelles. Déterminer une de ces primitives.

3 Intégration numérique

1. (moyen) Ecrire une procédure quad1 prenant en argument une fonction f, deux bornes a, b et un entier N qui calcule une approximation de l'intégrale de f entre a et b grâce à la formule des N rectangles à gauche.
2. (très facile) La tester avec $f = \exp$, $a = 0$, $b = 1$.

3. (moyen) Ecrire une procédure `quad2` du même type de `quad1`, mais utilisant des rectangles centrés.
4. (pas pratique avec Maple) Représenter graphiquement l'erreur commise par ces deux algorithmes (pour $f = \exp$ par exemple) en fonction du nombre de points utilisés. En fait, il est préférable de faire figurer le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du nombre de points, car ainsi la vitesse de convergence apparaît naturellement comme coefficient directeur de la droite trouvée (essayer de comprendre pourquoi).
5. (plus difficile, pour les plus rapides) Essayer de trouver des algorithmes meilleurs, c'est à dire trouvant des approximations de meilleure qualité avec moins de points.

4 Ensemble de Mandelbrot

Soit M l'ensemble des points z du plan complexe pour lesquels la suite définie par $u_0 = z$ et $u_{n+1} = u_n^2 - z$ reste bornée.

- Ecrire une procédure prenant en argument $z \in \mathbb{C}$ et retournant le premier indice n pour lequel $\|u_n\| > 2$ ou 30 si $\|u_{30}\| < 2$.
- En déduire une représentation approchée de M.