TD 2 : Limites, Dérivation, développements limités et algorithmique

1 Objectifs

- Révisions des opérateurs Maple D, diff, limit.
- Utilisition de taylor et series.
- Révision des procédures et des boucles.
- Utilisation non triviale de la fonction plot.

Au niveau mathématique, nous verrons quelques cas un peu pathologiques pouvant servir de contre-exemple à des résultats tentants, mais faux. Nous verrons aussi que Maple sait faire beaucoup de choses, mais qu'il a ses limites et qu'il faut parfois l'aider.
La dernière partie se compose quant à elle des deux premières parties d'un problème pilote proposé par l'école polytechnique pour la nouvelle épreuve qu'elle instaure cette année.

2 Autour de la dérivabilité

1. (très facile) Se familiariser avec les commandes D et diff en les testant sur des fonctions connues (sin, exp, les polynômes, etc...). Essayer d'en obtenir les dérivées d'ordre supérieur à 1.
2. (facile) Etudier sans Maple la fonction $x \to x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (variations , limites, représentation), puis vérifier tout cela grâce à Maple (on pourra se servir de la commande limit).
3. (moyen) Chercher dans l'aide l'utilisation des commandes taylor et series : qu'est-ce qui les différentie ?
4. (moyen) Considérer la fonction $x \to x^3 sin\left(\frac{1}{x}\right)$; montrer qu'elle admet un DL à l'ordre 2 en zéro, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en ce point.
5. (un peu plus dur) écrire une procédure taylorapp prenant en paramètres une fonction f et trois points x_0, x_{min} et x_{max} qui représente sur un même graphe la fonction f et ses poylômes de Taylor de rangs 5, 10 et 15 entre les points x_{min} et x_{max}. Essayer taylorapp avec :
   - $f(x) = x^{11}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ sur $[-1, 1]$
   - $f(x) = sin(x)$, $x_0 = 0$ sur $[-2\pi, 2\pi]$
   - $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ sur $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
   - $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, , $x_0 = 0$ sur $[-1, 1]$ (si Maple n'y arrive pas, faire le calcul à sa place).

   Observer les différences de convergence dans ces quatre cas, et tenter de les expliquer.

3 Problème pilote de l'X : parties I et II

Une entreprise de n employés veut récompenser ses k meilleurs vendeurs. Chaque employé désigné par son numéro de badge i ($0 \leqslant i < n$) a réalisé le chiffre de vente a_i au cours de l'année 1999. On suppose que, pour tout i, la quantité a_i est une entier naturel ($a_i \in \mathbb{N}$), et que les valeurs a_i sont rangées dans un tableau a de n éléments.

3.1 Question 1

Ecrire une fonction qui donne comme résultat la meilleure vente pour l'année 1999.
On fait l'hypothèse que la distribution des chiffres de vente est relativement uniforme. Pour trouver les k meilleurs vendeurs, une bonne approximation du seuil de vente à dépasser consiste à calculer le barycentre entre le minimum m et le maximum M des a_i ($0 \leqslant i < n$) avec les poids respectifs $(n-k)$ et k.

3.2 Question 2

Ecrire une fonction qui donne comme résultat ce baycentre après avoir calculé m et M.

3.3 Question 3

Ce résultat peut ne pas délimiter les k meilleurs ventes. Donner un exemple de tableau de ventes a dont plus de k valeurs sont supérieures au barycentre calculé à la question précédente.
On traite maintenant le cas général, en ne faisant aucune hypothèse sur la répartition des ventes. Néanmoins on supposera que tous les a_i sont distincts.

3.4 Question 4

A partir du calcul de la meilleure vente, écrire une fonction qui donne comme résultat la k-ième meilleure vente. (On évitera d'utiliser trop d'espace mémoire annexe en se contentant de réordonner une partie du tableau a).

3.5 Question 5

Donner une estimation du nombre de comparaisons effectuées par la fonction précédente.