TD 5 : Séries numériques

1 Objectifs

- Utilisation de la commande sum pour l'évaluation symbolique de séries.
- Algorithmique élémentaire.
- Familiarisation avec l'algèbre linéaire sous Maple.
- Représentation avec plot de graphiques discrets.

Nous verrons que Maple est *très efficace* pour manipuler les séries numériques, ce qui en fait un outil de choix pour obtenir si ce n'est toujours leur solution, au moins une intuition de la façon dont il faut aborder certains problèmes. Encore une fois, il est important de systématiquement essayer de *prévoir* ce qu'affiche le logiciel, afin de comprendre les phénomènes mathématiques sous-jacents et de mieux apprécier l'apport de l'ordinateur qui, loin de se substituer au raisonnement, doit s'y soumettre.

2 Autour de la fonction ζ de Riemann

1. Calculer avec Maple :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
2. On définit la fonction : $\zeta : z \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$. Quel est son domaine de définition ? Tracer au brouillon son allure, puis la représenter graphiquement.
3. (ENSAM 98) Pour $0 \leqslant z \leqslant 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$ est divergente. Ecrire une fonction nombre qui, pour tout A réel et tout z réel, renvoie le résultat suivant :
   - si z vérifie $0 \leqslant z \leqslant 1$, le plus petit entier N tel que : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^z} > A$,
   - sinon, un message d'erreur.

   Représenter graphiquement sur un même graphique les fonctions $z -> nombre(A, z)$, avec z variant entre 0 et 1 pour A prenant les valeurs 2, 3, 4 et 5.
4. Quel est le comportement asymptotique de $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - ln(n)$? Représenter graphiquement $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis en trouver un développement asymptotique.

3 Différentes formes de séries

1. (oral de l'X) Trouver a et b vérifiant :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+n) = n \ln n + an + b + o(1)$$
2. Discuter selon la valeur de $z \in \mathbb{C}$ la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, puis de $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$. Représenter graphiquement en trois dimensions la module de cette dernière somme en fonction de $z = x + iy$.
3. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Di la matrice diagonale de coefficients 1, 2, 3 et $A = PDP^{-1}$.
   Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Que remarque-t-on quand N tend vers l'infini ? Maple a une fonction exponential pour les matrices : à quoi correspond-elle ? Comparer $\exp(A)$ et $P \exp(Di) P^{-1}$: expliquer.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et par $u_{n+1} = sin(u_n)$. Quel est son comportement ?

   Tracer simultanément u_n et $\sqrt{\frac{3}{n}}$. Que peut-on conjecturer ? Essayer de le montrer.