TD 7 : Séries entières

1 Objectifs

- Découverte du package `Powseries`
- Manipulation des séries entières et résolution d'équations différentielles dont les solutions sont développables en séries entières.
- Calcul et tracé de courbes dans le plan complexe.

Les manipulations de séries entières sont facilités sous Maple par l'existence d'un package spécifique qu'on apprendra à utiliser : il permet de résoudre la plupart des exercices de classe préparatoire qui concernent ce domaine, et se révèle donc très utile.
Le deuxième problème est plus récréatif : il propose la construction d'une courbe fractale célèbre, tâche grandement facilitée par les capacités de calcul et de tracé de Maple.

2 Le package Powseries

1. Se convaincre, en essayant, que pour faire des manipulations sur les séries entières comme l'addition, la multiplication, la composition, etc... les commandes vues dans les TD précédents se révèlent insuffisante.
2. Chercher dans l'aide comment s'utilise le package `Powseries`. Essayer ses fonctions sur des exemples simples.
3. Développer en série entière la fonction $f : x \to \frac{\sin(x)}{1+\tan(x)}$ puis de $g : x \to f\left(f(x)\right)$
4. Résoudre de plusieurs façons, avec pour condition initiale $y(0) = 1$, l'équation différentielle :
$$(1 + x^2)y' = xy$$
5. Quelle sont les fonctions dont les coefficients c_n du développement en série entière vérifient :
   - $nc_n + 2c_{n-1} = 0$, $c_0 = 1$
   - $nc_n + 2 * (n-1)c_{n-1} = 0$, $c_0 = 0$, $c_1 = 2$
6. Que peut-on dire de la fonction $z \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(ikz)}{k}$?

3 Flocon de Von Koch

L'étude des courbes fractales est un développement assez récent et très prometteur des mathématiques modernes. Elles sont notamment utilisées pour modéliser certains phénomènes physiques ou économiques tellement irréguliers en apparence qu'ils étaient jusque là exclus du champ des sciences.
Nous allons en construire ici un exemple connu et assez joli : le flocon de Von Koch. On se place dans la suite dans le plan complexe : on confondra formellement les points de coordonnées (x, y) et leurs affixes $z = x + iy$. On désignera en outre par le mot *courbe* une liste de points, c'est à dire une liste de nombre complexes.

1. Comment peut-on simplement faire afficher une telle courbe à Maple ?
2. Soient A et E deux points du plan. On veut leur associer trois points B, C et D tels que :
   - $AB = BC = CD = DE = \frac{AE}{3}$.
   - $(BA, BC) = -\frac{2i\pi}{3}$

   Calculer les affixes de ces points, puis écrire une procédure `transfo_segment` qui prend en arguments A et E, et qui retourne la *séquence* B, C, D, E.
3. Ecrire une procédure `transfo_courbe` qui prend argument une courbe C et qui retourne la courbe obtenue en modifiant chacun de ses segments par `transfo_segment`.
4. Afficher le résutat obtenu en itérant `transfo_segment` plusieurs fois à partir d'un segment, puis d'un triangle équilateral.