TD 3 : Dérivation, développements limités et intégration

1 Objectifs

- Révisions des opérateurs Maple D, diff, limit.
- Utilisition de taylor et series.
- Révision des procédures et des boucles.
- Utilisation non triviale de la fonction plot.

Au niveau mathématique, nous verrons quelques cas un peu pathologiques pouvant servir de contre-exemple à des résultats tentants, mais faux. Nous verrons aussi que Maple sait faire beaucoup de choses, mais qu'il a ses limites et qu'il faut parfois l'aider.
Pour finir, nous verrons en comment les sommes de Riemann peuvent servir à calculer numériquement des intégrales et quelles est leur efficacité pour cela.

2 Autour de la dérivabilité

1. (très facile) Se familiariser avec les commandes D et diff en les testant sur des fonctions connues (sin, exp, les polynômes, etc...). Essayer d'en obtenir les dérivées d'ordre supérieur à 1.
2. (facile) Etudier sans Maple la fonction $x \to x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (variations , limites, représentation), puis vérifier tout cela grâce à Maple (on pourra se servir de la commande limit).
3. (moyen) Chercher dans l'aide l'utilisation des commandes taylor et series : qu'est-ce qui les différentie ?
4. (moyen) Considérer la fonction $x \to x^3 sin\left(\frac{1}{x}\right)$; montrer qu'elle admet un DL à l'ordre 2 en zéro, mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en ce point.
5. (un peu plus dur) écrire une procédure showtaylor prenant en paramètres une fonction f et trois points x_0, x_{min} et x_{max} qui représente sur un même graphe la fonction f et ses poylômes de Taylor de rangs 5, 10 et 15 entre les points x_{min} et x_{max}. Essayer showtaylor avec :
   - $f(x) = x^{11}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ sur $[-1, 1]$
   - $f(x) = sin(x)$, $x_0 = 0$ sur $[-2\pi, 2\pi]$
   - $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ sur $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
   - $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, , $x_0 = 0$ sur $[-1, 1]$ (si Maple n'y arrive pas, faire le calcul à sa place).

   Observer les différences de convergence dans ces quatre cas, et tenter de les expliquer.

3 Intégration numérique

1. (moyen) Ecrire une procédure integrale1 prenant en argument une fonction f, deux bornes a, b et un entier N qui calcule une approximation de l'intégrale de f entre a et

b grâce à la formule des N rectangles à gauche.

2. (très facile) La tester avec $f = \exp$, $a = 0$, $b = 1$.
3. (moyen) Ecrire une procédure integrale2 du même type de integrale1, mais utilisant des rectangles centrés.
4. (pas pratique avec Maple) Représenter graphiquement l'erreur commise par ces deux algorithmes (pour $f = \exp$ par exemple) en fonction du nombre de points utilisés. En fait, il est préférable de faire figurer le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du nombre de points, car ainsi la vitesse de convergence apparaît naturellement comme coefficient directeur de la droite trouvée (essayer de comprendre pourquoi).
5. (plus difficile, pour les plus rapides) Essayer de trouver des algorithmes meilleurs, c'est à dire trouvant des approximations de meilleure qualité avec moins de points.