TD 11 : Espaces vectoriels normés

1 Objectifs

- Dernier retour sur l'algèbre linéaire ;
- Mise en oeuvre et utilisation des séries de Fourier ;
- Présentation succinte du solveur d'équations différentielles.

Nous avons vu au cours de l'année suffisamment de commandes Maple pour pouvoir résoudre la plupart des problèmes qui sont susceptibles d'être posés aux concours : nous ne rencontrerons donc pas grand chose de nouveau de ce côté là aujourd'hui, à l'exception des fonctions de résolution d'équations différentielles que nous n'avons jamais eu l'occasion d'utiliser.

Les deux premiers exercices sont issus du concours de l'ENSAM, et correspondent tout à fait à ceux sur lesquels vous tomberez le cas échéant pour entrer à l'école Centrale. Vous essaierez donc de les résoudre avec un maximum d'autonomie et de la plus belle façon possible, comme si vous deviez ensuite présenter vos résultats à un examinateur.

Quant au dernier exercice, outre le fait qu'il aborde un nouvel aspect du logiciel, il vous fera entrevoir de manière ludique l'utilisation que l'on peut avoir de Maple en physique.

2 Espaces vectoriels euclidiens

Trouver une matrice X d'ordre 4, à coefficients complexes, telle que :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Transformée de Fourier

1. Soit f la fonction de variable réelle 2-périodique définie par :

   $$\forall x \in [-1,1[, f(x) = 2x^2 - x^5$$

   Tracer le graphe de f.

   Calculer les coefficients de Fourier de f. Définir les sommes partielles de la série de Fourier de f.

   Tracer sur la même figure les graphes de f et de la somme partielle de rang 10. Représenter les graphes des sommes partielles de rang 20, 40, 60, 80 et 100 au voisinage du point d'abscisse 1. Commentaire ?
2. En calculant la transformée de Fourier de la fonction 2-périodique coïncidant avec l'identité sur $[-1,1[$, et en appliquant l'égalité de Parseval, montrer que

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4 Le joggueur et le chien

Un joggueur est surpris au cours de son footing par un chien qui l'attaque.

Modéliser la situation et trouver un système d'équations différentielles satisfait par la position du chien en fonction de la trajectoire du joggueur.

Chercher dans l'aide de `dsolve` comment le résoudre.

Afficher les résultats pour différentes parcours du joggueur.