TD 9 : Algèbre linéaire générale

1 Objectifs

- Utilisation du package `linalg`
- Résolution avec Maple des exercices classiques d'algèbre linéaire.
- Application aux problèmes de pseudo-interpolation par la méthode des moindres carrés.

Comme nous l'avions déjà entrevu lors d'un TD précédent, la manipulation des vecteurs et matrices est assez particulière en Maple, et l'usage d'un package spécial est nécessaire. Il s'agira donc de le découvrir au fur et à mesure de la résolution d'exercices issus d'oraux de concours. Dans une deuxième partie, nous appliquerons ces connaissances, ainsi que celle de la commande `plot` sous ses différentes formes, au traitement d'un problème mathématique très courant, notamment en physique.

2 Le package Linalg

1. (C.C.P.) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)^2$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (X) On considère la matrice 5×5 $M = [m_{ij}]$ telle que : $\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } i > j \\ m_{ij} = j - i + 1 & \text{si } i \leqslant j \end{cases}$

   Calculer M^{-1}.
3. (C.E.N.) Calculer le déterminant : $\delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$
4. Construire une matrice aléatoire A et vérifier l'égalité : ${}^tComA \times A = A \times^t ComA = det(A).I$
5. (X) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$.
6. Trouver tous les $(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & a \\ 1 & \beta & b \\ 1 & \gamma & c \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres.

3 Interpolation au sens des moindres carrés

3.1 Présentation du problème

Après avoir effectué une série de mesures d'une variable en fonction d'un paramètre il est fréquent en physique que l'on cherche la "meilleure" relation affine entre la variable et le paramètre.

Cela revient en pratique à reporter dans le plan sous forme de nuage de points les mesures effectuées, et à chercher la droite qui représente le mieux ce nuage de points.

Par exemple, en chimie, on relève la conductivité d'une solution aqueuse en fonction de la concentration d'un ion pour mesurer sa contribution au passage du courant.

3.2 Formalisation mathématique

Mathématiquement, si la variable est représentée par le vecteur $\vec{y}$ et le paramètre par le vecteur $\vec{x}$, il s'agit de trouver les "meilleurs" α et β tels que $\forall i \in \mathbb{N}_n, \alpha x_i + \beta \approx y_i$. Cela peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On appelera A la matrice $n \times 2$ régissant ce système qui, dans le cas général, n'a bien sûr pas de solution. Il s'agira par conséquent de minimiser l'erreur commise en remplaçant $\vec{y}$ par $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, c'est à dire en minimisant $err(\alpha, \beta) = ||\vec{e}(\alpha, \beta))\,||_2$ où $\vec{e}(\alpha, \beta) = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \vec{y}$.

3.3 Résolution

Montrer que err est minimale si et seulement si $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de $\vec{y}$ sur ImA, et donc si et seulement si $\vec{e}$ est orthogonal à ImA.

En déduire que ${}^tAA \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = {}^tA\vec{y}$ et étudier l'existence et l'unicité de solutions pour cette équation.

Ceux qui préfèrent l'analyse à l'algèbre peuvent essayer de montrer ce même résultat en faisant un calcul de minimisation de la fonction $err : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

3.4 Application

On soumet un dipôle à différentes tensions et on relève l'intensité correspondante.

On trouve les résultats suivants :

Tension en Volts	1.1	1.9	3.2	4.0	5.3
Intensité en Milliampères	1.6	2.9	4.9	6.1	8.1

Représenter graphiquement le nuage de points associé à ces mesures et la droite d'interpolation au sens des moindre carrés. Quel est le dipôle en question ?

3.5 Généralisation

Supposons maintenant qu'on veuille représenter nos données non plus seulement par une droite mais par une parabole ou même un polynôme de degré quelconque.

Peut-on adapter la méthode ci-dessus pour résoudre ce nouveau problème ? Que se passe-t-il quand on augmente le degré de l'interpolant ?

Et que faire si l'on attend une loi de la forme $y = \exp P(x)$ ou $y = \frac{1}{P(x)}$, où P est un polynôme quelconque ?