Monodromie d'une équation différentielle ordinaire

A. Eloy

Février 2014

Si certaines équations différentielles complexes admettent des solutions globales, comme la plus triviale notre chère exponentielle, certaines n'admettent que des solutions locales qui ne peuvent être prolongées sans heurt au plan tout entier. Ainsi si l'on peut avoir un logarithme défini autour de 1, tenter de le prolonger analytiquement le long d'un lacet transformera son être sans changer son caractère solution d'équation différentielle : c'est ce que l'on appelle la monodromie. Nous discuterons donc de la monodromie d'équations singulières en 0, de son rapport avec le groupe fondamental et des rapports du groupe de monodromie et du groupe de Galois différentiel.
Le but de ce travail est d'obtenir des outils algébriques permettant d'étudier les équations différentielles à la manière des équations algébriques par la théorie de Galois. Nous ne détaillerons pas ici les outils mathématiques les plus puissants mis en jeu, comme le faisceau des solutions, la correspondance vu comme équivalence catégorique ou tout simplement les preuves de nos résultats. Nous ne voulons ici que présenter à un large publique de mathématicien-ne-s une manière différente d'aborder les équations différentielles.

Table des matières

1 Monodromie locale d'une EDO

Pour cet exposé nous préférerons nous ramener à de "gentilles" équations de la forme

$$f^{(n)} + a_1.f^{(n-1)} + \cdots + a_n.f = 0 \tag{1}$$

où les a_i sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.
On rappelle que l'ordre d'une fonction méromorphe a en un point p noté $v_p(a)$ est le plus petit n tel que $(z-p)^{-n}a(z)$ soit une fonction holomorphe non nulle en p. Ainsi si l'on écrit notre fonction a de la forme $a(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n (z-p)^n$ (ce qui est toujours possible au voisinage de p) avec $N \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_N \neq 0$ alors $v_p(a) = N$.

Définition 1. On dira que l'équation différentielle (1) a une singularité de première espèce en p (ou qu'elle est singulière régulière en p, ou encore fuchsienne en p) si $v_p(a_i) \geq -i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Pour la suite afin de simplifier les choses nous n'étudierons que des équations ayant une singularité régulière en 0 et aucune autre singularité. Nous travaillerons donc avec des équations à coefficients dans $\mathbb{C}(\{z\})$, le corps des (germes en 0 de) fonctions méromorphes en 0, et nous commencerons par étudier les solutions locales au point 1.

Exemple. Nous travaillerons dans cet exposé sur un exemple particulier : l'équation

$$z^2 f'' + \frac{1}{4} f = 0 \tag{2}$$

Cette équation possède deux solutions indépendantes autour de 1 :

$$\sqrt{z} := \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n$$

où

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

et

$$\sqrt{z}\log(z)$$

où

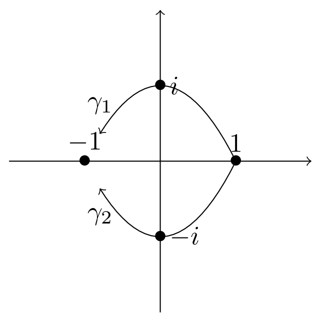
$$\log(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

Par le théorème de Cauchy nous savons que notre ensemble de solutions est isomorphe à $\mathbb{C}^2$ et que les solutions sont de la forme $\alpha\sqrt{z} + \beta\sqrt{z}\log(z)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Étudier la base de solutions $(\sqrt{z}, \sqrt{z}\log(z))$ suffira donc pour étudier notre ensemble de solutions.

On aimerait maintenant voir ce qu'il se passe lorsque l'on prolonge analytiquement nos solutions le long de chemins.

Prolonger une fonction le long d'un chemin signifie recouvrir ce chemin de disques de manière à ce que deux disques consécutifs s'intersectent, puis sur chaque intersection prolonger f sur le disque suivant. Le résultat ne dépendra alors pas du recouvrement de disques choisi.

Si l'on prend un chemin γ entre a et b et f fonction holomorphe définie autour de a, on notera $f^{[\gamma]}$ l'image de son prolongement analytique le long de γ. (On note γ entre crochets parce que le prolongement ne dépend que de la classe du chemin choisi : c'est le premier - et le vrai - sens de monodromie (*monos* unique, *dromos* chemin) : le prolongement ne dépend pas du chemin choisi tant que les chemins sont homotopes).



Prenons par exemple pour γ_1 le chemin $t \longmapsto (-t, -t^2+1)$ et pour γ_2 le chemin $t \longmapsto (-t, t^2-1)$ pour $t \in [-1,1]$. Alors on a le comportement des fonctions prolongées en -1 :

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{z}^{[\gamma_1]} & \rightsquigarrow & \sqrt{-1} = i \\ \sqrt{z}^{[\gamma_2]} & \rightsquigarrow & \sqrt{-1} = -i \\ \log^{[\gamma_1]} & \rightsquigarrow & \log(-1) = i\pi \\ \log^{[\gamma_2]} & \rightsquigarrow & \log(-1) = -i\pi \end{array}$$

On a donc deux chemins différents qui donnent deux prolongements différents. Ce sont donc deux fonctions qui ne sont pas prolongeable à $\mathbb{C}$ tout entier ; elles sont ce que l'on appelle multivaluées. Le prolongement d'une telle fonction le long d'un chemin dépend de la classe d'homotopie du chemin ; on obtient ainsi la monodromie du prolongement.

Rappel. On rappelle que deux chemins d'extrémités a et b sont homotopes sur l'ouvert U si l'on peut "remplir" dans U la surface entourée par les deux chemins ; de manière formelle si $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow U$ sont deux chemins une homotopie est une fonction continue $F : I^2 \longrightarrow U$ telle que $F(0,\cdot) = a, F(1,\cdot) = b, F(\cdot,0) = \gamma_1, F(\cdot,1) = \gamma_2$. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence, et dans le cas $a = b$ (on parle alors de "lacets" plutôt que de chemins) l'ensemble des lacets quotienté par cette relation forme un groupe noté $\pi_1(U,a)$ appelé groupe fondamental de U en a.

Ici puisque nous avons une singularité en 0 nous nous plaçons sur $\mathbb{C}^*$; ce "trou" en 0 pose problème. Tourner autour de 0 va changer les solutions ; l'ensemble de ces transformations forme alors un groupe appelé groupe de monodromie du système au point 1.

Remarque. On perd le sens premier de monodromie, puisqu'ici la monodromie caractérisera la transformation des solutions en fonction d'un chemin choisi.

Prenons comme lacet en 1 le lacet $\gamma : t \longrightarrow (\cos(2i\pi t), \sin(2i\pi t))$ pour $t \in [0,1]$. Ce lacet va engendrer le groupe fondamental de $\mathbb{C}^*$ en 1 ; tout lacet ne dépend homotopiquement que du nombre (relatif) de fois où il tourne autour de 0. On a alors $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par γ (i.e. l'isomorphisme est donné par $1 \longmapsto [\gamma]$ et donc $n \longmapsto [\gamma^n]$).

Remarque. On aurait pu aussi prendre $-\gamma$ comme générateur du π_1 : il n'y a pas d'isomorphisme canonique du π_1 avec $\mathbb{Z}$.

Que donne alors le prolongement analytique de notre base de solutions le long d'un élément du π_1 ? Pour le lacet nul (plus exactement la classe des lacets homotopiques au lacet constant 1) il n'y a logiquement pas de changement ; par contre comme l'on pouvait s'en douter en voyant les différences de prolongement le long de γ_1 et γ_2, le prolongement le long du générateur γ va transformer notre base de solutions en une autre base de solutions : $(-\sqrt{z}, -\sqrt{z}(\log(z)+2i\pi))$. Et cela se répète indéfiniment ! Ainsi prolonger deux fois suivant γ nous donne $(\sqrt{z}, \sqrt{z}(\log(z)+4i\pi))$ etc etc, et on voit que l'action du prolongement est linéaire. C'est pour cela qu'on parle de fonctions multivaluées : elles ont en un sens plusieurs valeurs au même point, selon le prolongement choisi.

L'action du prolongement sur la base de solutions peut se représenter matriciellement : ainsi on peut noter $M^{[\gamma]}$ la matrice (inversible !) de l'action de γ sur la base et on a

$$M^{[\gamma]} = \begin{pmatrix} -1 & -2i\pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'action de $[\gamma^n]$ est donnée par $(M^{[\gamma]})^n$; on a donc un morphisme de groupes $[\gamma] \longmapsto M^{[\gamma]}$ entre notre π_1 et $GL_2(\mathbb{C})$. C'est ce qu'on appelle une représentation (matricielle) du π_1 : un morphisme de groupes entre le π_1 et un GL_n. Elle code ici une action de notre groupe sur l'ensemble des automorphismes des solutions de (2) au point 1 qui est isomorphe à $GL_2(\mathbb{C})$ puisque l'ensemble des solutions est isomorphe à $\mathbb{C}^2$ par notre choix de base.

Ceci nous permet de définir de manière générale le groupe (matriciel) de monodromie d'une équation différentielle : c'est tout simplement l'image de la représentation du π_1 associée, c'est-à-dire pour notre exemple

$$\mathrm{Mon}((2),1) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -2i\pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

A toute EDO singulière régulière en 0 on a associé une représentation matricielle du $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$; il se trouve que (à isomorphisme près) on peut faire pareil dans l'autre sens : on a donc une correspondance entre ces deux types d'objets (ce qui signifie en fait une équivalence de catégories) : on l'appelle la correspondance de Riemann-Hilbert locale.

Ainsi plutôt que d'étudier directement nos EDOs nous pouvons nous restreindre à l'étude des représentations du π_1, soit l'étude des représentations de $\mathbb{Z}$: ainsi par un raisonnement analytique et topologique on passe de l'étude d'équations différentielles à une étude purement algébrique !

2 Groupe de Galois d'une EDO

Ce qui fait l'importance de la monodromie et de notre correspondance est que, dans le cadre singulier-régulier, elle engendre entièrement le groupe de Galois (dans un certain sens) de notre équation différentielle. Pour pouvoir parler de ça nous devons d'abord définir ce qu'est un groupe de Galois dans ce cadre précis.

2.1 Groupe de Galois local et monodromie

Nous nous sommes placé-e-s sur le corps $K = \mathbb{C}(\{z\})$ d'où nous avons tiré nos coefficients ; nous avons ensuite calculé deux solutions à notre équation (2) autour du point 1 qui engendrent l'espace des solutions. Nous pouvons alors créer la K-algèbre $A := K[\sqrt{z}, \sqrt{z}\log(z)]$ dans laquelle vivent nos solutions. Tout comme en théorie de Galois classique on a donc une extension d'anneaux $K \longrightarrow A$ et on aimerait définir le groupe de Galois comme le groupe des automorphismes de A laissant K invariant. Cependant cette définition pose problème puisqu'elle ignore complètement l'aspect différentiable des solutions ; on va donc définir

$$\mathrm{Gal}((2),1) = \left\{ \sigma : A \longrightarrow A \text{ automorphisme } | \sigma_{|K} = id_K, \sigma(f') = \sigma(f)' \right\}$$

Dans notre cas $\sigma(\sqrt{z})^2 = z \Rightarrow \sigma(\sqrt{z}) = \pm\sqrt{z}$ et $\sigma(\log(z))' = \frac{1}{z} \Rightarrow \sigma(\log(z)) = \log(z) + c$ d'où

$$\mathrm{Gal}((2),1) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon c \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}, \varepsilon^2 = 1 \right\} \supseteq \mathrm{Mon}$$

Le groupe de Galois différentiel ainsi créé, outil algébrique par excellence dans l'étude des EDOs, contient toujours le groupe de monodromie qui en est un sous-groupe. Il est ce qu'on appelle un groupe algébrique (i.e. définit par des équations polynomiales), et dans le cas singulier régulier il est même le plus petit groupe algébrique contenant le groupe de monodromie. Ce résultat est le théorème de Schlesinger : dans ce cadre le groupe de monodromie est dense dans celui de Galois pour une certaine topologie appelée topologie de Zariski (qui est LA topologie de la géométrie algébrique).

2.2 Un groupe de Galois global

On a vu que les groupes de monodromie étaient les images des représentations du π_1, qui "code" l'ensemble des groupes de monodromie et peut être vu comme un groupe de monodromie "global". On pourrait se demander s'il existe un tel groupe de Galois "global", tel que tous les groupes de Galois associés à une équation ne soient que les images de représentations de ce groupe, tout en respectant l'inclusion du groupe de monodromie ; on chercherait donc un groupe $\widehat{\pi_1}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_1 \arrow[dd, hook] \arrow[dr, "mon"] & \\
& GL_n \\
\widehat{\pi_1} \arrow[ur, "gal"'] &
\end{tikzcd}$$

Il se trouve que ce groupe existe bien ; c'est ce qu'on appelle un groupe proalgébrique (une limite projective de groupes algébriques). De plus la correspondance de Riemann-Hilbert dans le cadre des EDOs à une singularité régulière se généralise : les telles EDOs sont en correspondance avec les représentations du π_1 elles-même en correspondance avec les représentations dites "rationnelles" de ce $\widehat{\pi_1}$. Cette deuxième partie de la correspondance vient de la théorie tannakienne, qui elle-même vient de la dualité de Tannaka-Krein. Cette théorie permet de calculer notre groupe universel qui vaut ici $\widehat{\pi_1}(\mathbb{C}^*, 1) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$.

3 Ouverture vers des cas plus larges

3.1 Plusieurs singularités régulières

Si une équation admet plusieurs singularités régulières (par exemple $f'' + \frac{1}{z(z-i)} f = 0$) tout ce que l'on a déjà fait reste valable modulo le changement du π_1. On est obligé-e de se placer sur un nouvel ouvert de $\mathbb{C}$ qui sera $\mathbb{C}$ privé de ces singularités, et si l'on a N singularités notre π_1 sera isomorphe à $\mathbb{Z}^{*N}$, un produit libre de N copies de $\mathbb{Z}$. C'est un groupe non abélien composé des mots en les générateurs des N copies de $\mathbb{Z}$ notés $a_1, \ldots, a_N$ représentant les N lacets simples tournant autour de chacun des N points.

On peut de la même manière calculer le groupe de monodromie et le groupe de Galois local mais le problème arrive au groupe de Galois local : les représentations de notre π_1 étant les groupes matriciels engendrés par N matrices ne commutant pas son calcul demanderait une connaissance précise de la classification de tels ensembles de matrices, connaissance dont nous ne disposons pas aujourd'hui.

3.2 Une singularité non régulière

Prenons l'équation

$$z^2 f' + f = 0 \tag{3}$$

Elle admet une singularité irrégulière en 0 ; une solution est $f = \exp \frac{1}{z}$ qui a donc une singularité essentielle en 0 et est définie sur tout $\mathbb{C}^*$. Elle n'est donc pas multivaluée ; sa monodromie est donc $\{1\}$. Un calcul du groupe de Galois nous donne :

$$\sigma(\exp \frac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2}\sigma(\exp \frac{1}{z})$$

d'où $\sigma(\exp\frac{1}{z}) = \alpha\exp\frac{1}{z}$ dont on déduit $\mathrm{Gal}((3), 1) = \mathbb{C}^*$. Le groupe de monodromie n'engendre en aucun cas le groupe de Galois différentiel : le théorème de Schlesinger est donc mit en défaut. Il manque ce que l'on appelle les opérateurs de Stokes, et plus exactement les dérivations étrangères qui en découlent.