Quadrature n° 93 (2014) 1-4

Le procédé générateur

par Julie Arnal-Brezun

Résumé.

On introduit ici la notion de *procédé générateur*, à travers deux applications : matrices semblables dans un sur-corps et étude des matrices cycliques dans les sous-corps de $\mathbb{C}$.
Si K est un corps commutatif et L un sur-corps commutatif de K, on regarde L comme un K espace vectoriel. Si cet espace vectoriel est de dimension finie, alors on en a une base. Si cet espace vectoriel est de dimension infinie, on applique le procédé générateur : à un nombre fini de vecteurs de L, on associe une base du K espace vectoriel qu'ils engendrent. Parmi les corps usuels, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension deux, puisque $\mathbb{C} = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}\{1,i\}$. Par contre $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{Q}$ espace de dimension finie. On applique alors le procédé générateur à chaque famille de réels pour en obtenir une $\mathbb{Q}$ base ; on aura par exemple :
$\mathrm{vect}_{\mathbb{Q}}\{1, 4-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}-5, \frac{\pi}{3}\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{Q}}\{1, \sqrt{2}, \pi\}$.

I Matrices semblables

Le procédé générateur se comprend aisément à partir d'une démonstration classique d'un résultat connu, dans le cas particulier où $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$:

Théorème 1. *Si $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

En effet, si A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $A = PBP^{-1}$; soit, $AP = PB$. On décompose alors P dans la $\mathbb{R}$ base $(1,i)$ de $\mathbb{C}$: $P = Q + i.R$, avec $(Q,R) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Par exemple, nous écrirons :

$$P_{\mathbb{C},\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \frac{i}{5} & 1+i \\ -i & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La démonstration sera achevée par la suite. Mais remarquons que c'est ici que l'on ne peut pas directement généraliser cette démonstration à des corps K et L quelconques : avec $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{R}$, par exemple, il n'existe pas de $\mathbb{Q}$ base de $\mathbb{R}$ qui permettrait la décomposition de toutes matrices à coefficients réels comme combinaisons linéaires de nombres réels et matrices à coefficients rationnels. On affine donc cette démonstration pour montrer un théorème plus général.

Dans toute la suite, K est un corps commutatif infini et L un sur-corps commutatif de K.

Théorème 2. *Si $(A,B) \in \mathscr{M}_n(K)^2$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(L)$, alors A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(K)$.*

La démonstration commence comme la précédente ; on a $AP = PB$ avec $(A,B) \in \mathscr{M}_n(K)^2$ et $P \in \mathscr{GL}_n(L)$. On applique alors le procédé générateur à P : puisque P ne possède qu'un nombre fini de coefficients, notés $\{p_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n\}$, il existe une base $(e_1,\ldots,e_m)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ de $\mathrm{Vect}_K\{p_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n\}$. Par construction, on a : $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, $e_i \in L$; de plus, $\exists\, (P_1,\ldots P_m) \in \mathscr{M}_n(K)^m$: $P = \sum P_i.e_i$. Ainsi, nous écrirons :

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{R},\mathbb{Q}} &= \begin{pmatrix} 1 & 4-\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-5 & \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2}.\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \pi.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit l'application polynomiale $\Phi : (x_1,\ldots,x_m) \in L^m \mapsto \det(\sum P_i.x_i)$. P étant inversible, $\Phi(e_1,\ldots,e_m) = \det(P) \neq 0$; Φ est donc non nulle. Ainsi, le polynôme qui lui est associé est non nul ; par conséquent, puisque K est infini, l'application polynomiale qui s'en déduit par restriction à K est non identiquement nulle. D'où l'existence de $(f_1,\dots,f_m)\in K^m$ tels que $\Phi(f_1,\dots f_m)\neq 0$, c'est à dire : $Q=\sum P_i.f_i\in\mathcal{GL}_n(K)$.

Ainsi, dans notre exemple, nous aurons :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbb{R},\mathbb{Q}}(x_1,x_2,x_3)&=\det\begin{pmatrix}x_1 & 4x_1-\frac{3}{2}x_2\\ x_2-5x_1 & \frac{x_3}{3}\end{pmatrix}\\ &=-20x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2+\frac{x_1x_3}{3}-\frac{23}{2}x_1x_2.\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\phi_{\mathbb{R},\mathbb{Q}}(1,0,0)=-20\neq 0$, ce qui fait que nous pouvons prendre comme matrice Q :

$$Q_{\mathbb{R},\mathbb{Q}}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -5 & 0\end{pmatrix}.$$

De l'égalité $AP=PB$, soit $\sum(AP_i).e_i=\sum(P_iB).e_i$, on déduit, par K-liberté de la famille $(e_1,\dots e_m)$ d'éléments de L : $\forall i\in\{1,\dots,m\},AP_i=P_iB$. Ainsi, $\sum(AP_i).f_i=\sum(P_iB).f_i$, soit $AQ=QB$. Q étant inversible, on obtient finalement : $A=QBQ^{-1}$; or Q est à coefficients dans K, donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Le procédé générateur nous a donc permis de généraliser le premier théorème à des corps commutatifs infinis quelconques, grâce à une démonstration simple s'appuyant sur le modèle du cas particulier des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

II Matrices cycliques

Le procédé générateur s'avère aussi très utile afin d'étendre les propriétés de l'ensemble des matrices cycliques aux sous-corps de $\mathbb{C}$.

On notera par la suite :

K : un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$

$\mathcal{C}_K$: l'ensemble des matrices de taille n ($n\in\mathbb{N}^*$ fixé), à coefficients dans K, dites cycliques.

Mais comment définit-on les matrices cycliques ? Commençons donc par étudier les deux caractérisations suivantes :

Définition 1. $\mathcal{C}_K=\{M\in\mathcal{M}_n(K)\mid\exists\, X\in\mathcal{M}_{n,1}(K):(X,MX,\dots,M^{n-1}X)\text{ libre}\}$

Définition 2. $\mathcal{C}_K=\{M\in\mathcal{M}_n(K)\mid\chi_M=\pi_M\}$, *où* χ_M *est le polynôme caractéristique de* M, *et* π_M *son polynôme minimal.*

$$N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Il est connu que, pour $K=\mathbb{C}$, ces deux définitions sont équivalentes. Mais qu'en est-il pour un sous-corps K quelconque ?

Avant même de s'interroger sur l'équivalence de ces définitions dans le cas général, que dire de la dépendance de χ_M et π_M vis à vis du corps de base ? En effet, χ_M étant calculé à partir des coefficients de M, il reste identique que l'on regarde M comme une matrice à coefficients dans K ou comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. En revanche, π_M, calculé dans K, est défini par : $\pi_M.K[Y]=\{R\in K[Y]\mid R(M)=0\}$ avec π_M unitaire ; et μ_M, calculé dans $\mathbb{C}$, est défini par : $\mu_M.\mathbb{C}[Y]=\{R\in\mathbb{C}[Y]\mid R(M)=0\}$ avec μ_M unitaire. Le procédé générateur va nous permettre de montrer le lemme suivant :

Lemme 1. $\forall M\in\mathcal{M}_n(K)$, $\pi_M=\mu_M$.

Soit $\mu_M=\sum a_i.Y^i$ de degré d, avec $(a_i)\in\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Les coefficients de μ_M étant en nombre fini, il existe une base $(e_1,\dots,e_m)$ ($m\in\mathbb{N}^*$) du K espace vectoriel $\mathrm{Vect}_K\{a_i\mid i\in\mathbb{N}\}$. En écrivant les complexes (a_i) dans cette base, on en déduit l'existence de polynômes $(R_1,\dots,R_m)\in K_d[Y]^m$ tels que : $\mu_M=\sum R_j.e_j$. Or $\mu_M\neq 0$, donc il existe un indice j_0 tel que R_{j_0} soit non nul. De plus, on a $\mu_M(M)=0$, soit : $\sum R_j(M).e_j=0$; comme la famille $(e_j)_{j\in\{1,\dots,m\}}$ est K-libre et que, pour tout j, $R_j(M)$ est à coefficients dans K, on en déduit que pour tout j, $R_j(M)=0$. Notamment, $R_{j_0}(M)=0$: on a ainsi un polynôme non nul annulateur de M, à coefficients dans K, de degré au plus $d=\deg(\mu_M)$. Donc $\deg(\pi_M)\leq\deg(\mu_M)$.

D'autre part, $\pi_M\in K[Y]\subset\mathbb{C}[Y]$ et $\pi_M(M)=0$; donc $\mu_M|\pi_M$. Par un argument de degré, et puisque μ_M et π_M sont unitaires par définition, on a finalement : $\mu_M=\pi_M$. D'où le lemme.

Ce lemme étant établi, on donne un sens au fait de généraliser la caractérisation des matrices cycliques dans tous sous-corps K de $\mathbb{C}$. Dans le cas particulier de $\mathbb{C}$ qui est algébriquement clos, nous pourrons montrer l'équivalence des définitions 1 et 2. Puis, grâce au procédé générateur, nous étendrons cette équivalence.

Théorème 3. $\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mid\exists\, X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}):(X,MX,\dots,M^{n-1}X)\text{ libre}\}=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mid\chi_M=\pi_M\}$

L'inclusion directe est immédiate : en effet, soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant : $(X,MX,\dots,M^{n-1}X)$ est libre. Soit R un polynôme annulateur non nul de M ; alors $R(M)=0$, a fortiori $R(M)X=0$. Ainsi, si $R=\sum a_i.Y^i$ est de degré p, alors $(X,MX,\dots,M^pX)$ est liée ; R est donc de degré au moins n. Par conséquent, π_M est de degré au moins n. De plus, d'après le théorème de Cayley-Hamiltion, χ_M, polynôme de degré n, annule M ; or π_M divise χ_M, donc π_M est de degré au plus n. Finalement, π_M est de degré n, tout comme χ_M qu'il divise ; π_M et χ_M étant unitaires, ils sont donc égaux. D'où l'inclusion directe.

Pour l'inclusion réciproque, on utilise que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\pi_M = \chi_M$. On note donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ $(q \in \mathbb{N}^*)$ les racines deux à deux distinctes de π_M, et $(n_1, \dots, n_q)$ leurs multiplicités ; puisque $\pi_M = \chi_M = \Pi(Y - \lambda_i)^{n_i}$, on a : $\sum n_i = n$. D'après le lemme des noyaux : $\mathbb{C}^n = \mathsf{Ker}(\pi_M(M)) = \oplus\, \mathsf{Ker}(M - \lambda_i.I_n)^{n_i}$ ((1)). Pour chaque $i \in \{1, \dots, q\}$, $\mathsf{Ker}(M - \lambda_i.I_n)^{n_i} \neq \mathsf{Ker}(M - \lambda_i.I_n)^{n_i - 1}$ (sinon, on aurait un polynôme annulateur de M de degré strictement inférieur au degré de π_M, ce qui est absurde) ; ainsi, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $\exists\, X_i \in \mathsf{Ker}(M - \lambda_i.I_n)^{n_i} \smallsetminus \mathsf{Ker}(M - \lambda_i.I_n)^{n_i - 1}$. Soit alors $X = \sum X_i$ et montrons que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre. Soit un polynôme R tel que $R(M)X = 0$. Par linéarité de $R(M)$, on a donc : $\sum R(M)X_i = 0$ ((2)). Or, $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $R(M)X_i \in \mathsf{Ker}(M - \lambda_i)^{n_i}$. Ainsi, d'après les relations (1) et (2), on obtient : $\forall i \in \{1, \dots, q\}$, $R(M)X_i = 0$. Par construction, pour tout i, $(Y - \lambda_i)^{n_i}$ est le polynôme minimal ponctuel de X_i : $(Y - \lambda_i)^{n_i}.\mathbb{C}[Y] = \{P \in \mathbb{C}[Y] \mid P(M)X_i = 0\}$. Or, pour tout i, $R(M)$ annule X_i ; d'où, pour tout i, $(Y - \lambda_i)^{n_i}$ divise R. Les λ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $(Y - \lambda_i)^{n_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, donc : $\Pi(Y - \lambda_i)^{n_i} \mid R$. Ainsi, R est de degré au moins $\sum n_i = n$. Par conséquent, on a trouvé $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre. D'où l'inclusion réciproque, et le théorème.

Nous pouvons désormais nous intéresser au cas général grâce au procédé générateur.

Théorème 4. *$\{M \in \mathscr{M}_n(K) \mid \exists\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(K) : (X, MX, \dots, M^{n-1}X)\ \mathsf{libre}\} = \{M \in \mathscr{M}_n(K) \mid \chi_M = \pi_M\}$, K étant un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$.*

Pour la première inclusion, on utilise l'inclusion directe du cas complexe :

$$\begin{aligned}
&\{M \in \mathscr{M}_n(K) \mid \exists\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(K) : (X, MX, \dots, M^{n-1}X)\ \mathsf{libre}\} \\
&\subseteq \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) : (X, MX, \dots, M^{n-1}X)\ \mathsf{libre}\} \cap \mathscr{M}_n(K) \\
&\subseteq \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M = \pi_M\} \cap \mathscr{M}_n(K) \\
&\subseteq \{M \in \mathscr{M}_n(K) \mid \chi_M = \pi_M\}.
\end{aligned}$$

Pour l'inclusion réciproque, on se donne $M \in \mathscr{M}_n(K)$ tel que $\pi_M = \chi_M$. Ainsi, $M \in \{N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_N = \pi_N\}$; d'après le cas complexe, il existe donc $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre, c'est à dire : $\mathsf{det}(X, MX, \dots, M^{n-1}X) \neq 0$. D'après le procédé générateur appliqué à X, il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_m) \in \mathbb{C}^m$ base de $\mathsf{Vect}_K\{x_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ (où $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de X), et $(X_1, \dots, X_m) \in (K^n)^m$ tels que : $X = \sum X_i.e_i$. Posons alors $\Phi : (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{C}^m \mapsto \mathsf{det}((\sum X_i.f_i), M(\sum X_i.f_i), \dots, M^{n-1}(\sum X_i.f_i))$. Φ est polynomiale et non nulle en $(e_1, \dots, e_m)$. K étant infini (tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$, puisqu'il contient $1_{\mathbb{C}}$ et que c'est un corps), Φ restreinte à K est non identiquement nulle. Ainsi : $\exists\, (f_1, \dots, f_m) \in K^m$: $\mathsf{det}((\sum X_i.f_i), M(\sum X_i.f_i), \dots, M^{n-1}(\sum X_i.f_i)) \neq 0$. Finalement, avec $Z = \sum X_i.f_i \in K^m$, on a : $(Z, MZ, \dots, M^{n-1}Z)$ libre. On a donc la seconde inclusion, et le théorème général.

L'équivalence des définitions 1 et 2 étant démontrée dans tout sous-corps de $\mathbb{C}$, que dire de deux propriétés bien connues de l'ensemble des matrices dans le cas complexe, étendues à un corps quelconque ? On s'intéresse donc, pour clôturer cette étude des matrices cycliques dans les sous-corps du corps des complexes, aux deux propriétés suivantes :

Propriété 1. *$\mathscr{C}_K$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(K)$.*

Propriété 2. *$\mathscr{C}_K$ est dense dans $\mathscr{M}_n(K)$.*

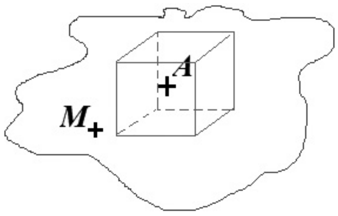
La première se démontre indifféremment dans $\mathbb{C}$ et ses sous-corps à partir de la première défintion des matrices cycliques. Soit $M \in \mathscr{C}_K$. Il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ tel que $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre, donc : $\mathsf{det}(X, MX, \dots, M^{n-1}X) \neq 0$. Soit $\Phi : A \in \mathscr{M}_n(K) \mapsto \mathsf{det}(X, AX, \dots, A^{n-1}X)$. Φ est polynomiale, donc continue ; et $M \in \Phi^{-1}(K^*)$. Si K^* est ouvert, alors on peut conclure qu'il existe un voisinage ouvert de M dans $\mathscr{C}_K$. De manière générale, il suffit de remarquer que $\mathscr{C}_K = \mathscr{C}_{\mathbb{C}} \cap \mathscr{M}_n(K)$; or, $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}$ est ouvert car $\mathbb{C}^*$ est ouvert, d'où $\mathscr{C}_K$ est un ouvert relativement à $\mathscr{M}_n(K)$.

Pour la deuxième propriété, on la montre aisément dans le cas particulier du corps des complexes.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; on montre classiquement que A est limite d'une suite de matrices à valeurs propres deux à deux distinctes (matrices cycliques, puisque le degré du polynôme minimal de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est au moins le nombre de valeurs propres distinctes de M). $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, A est trigonalisable : $\exists\, P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C}), T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) : A = PTP^{-1}$, avec T triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. Pour $i \in \{1, \dots n\}, p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mu_i(p) = \lambda_i + \frac{i}{p}$; $\forall i, j, \mu_i(p) = \mu_j(p) \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ et $p = \left|\frac{i-j}{\lambda_i - \lambda_j}\right| \leq \left|\frac{n}{\mathsf{min}\{|\lambda_k - \lambda_l| \mid \lambda_k \neq \lambda_l\}}\right|$. Ainsi, pour $p > \left|\frac{n}{\mathsf{min}\{|\lambda_k - \lambda_l| \mid \lambda_k \neq \lambda_l\}}\right|$, en notant T_p la matrice triangulaire supérieure égale à T, avec les coefficients $(\mu_i(p))$ sur la diagonale, T_p est à valeurs propres deux à deux distinctes. Finalement, A est la limite de la suite (A_p), où, pour tout p, $A_p = PT_pP^{-1}$ est cyclique. Ceci étant prouvé pour tout A, $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}$ est donc dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans le cas général, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et $r > 0$ tels que $B(A, r) \cap \mathscr{C}_K = \emptyset$, où $B(A, r) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \|M -$

$A\| < r\}$, $\|.\|$ étant la norme infinie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le cas complexe, pour $A \in \mathscr{M}_n(K) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathscr{C}_{\mathbb{C}} \cap B(A,r)$. Notons $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, MX, \ldots, M^{n-1}X)$ soit libre. Soit $\Phi : (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n^2} \mapsto \det(X, (a_{i,j})X, \ldots, (a_{i,j})^{n-1}X)$; Φ est polynomiale et non nulle en les coefficients de M. Mais l'hypothèse : $B(A,r) \cap \mathscr{C}_K = \emptyset$ impose que Φ soit nulle : en effet, en notant $A = (\alpha_{i,j})$, Φ est alors nulle sur le produit cartésien $(B(\alpha_{1,1}, r)_{\mathbb{C}} \cap K \times \ldots \times B(\alpha_{i,j}, r)_{\mathbb{C}} \cap K \times \ldots \times B(\alpha_{n,n}, r)_{\mathbb{C}} \cap K) \in \mathbb{C}^{n^2}$; chaque facteur du produit cartésien étant de cardinal infini [1], on montre [2] par récurrence sur le nombre de variables de Φ que Φ est nulle. D'où la contradiction souhaitée. Ainsi, pour tout sous-corps K de $\mathbb{C}$, $\mathscr{C}_K$ est dense dans $\mathscr{M}_n(K)$.



III Conclusion

Nous avons ainsi pu mettre en évidence, à travers de nouvelles démonstrations de résultats connus, le caractère rigoureux et synthétique qu'apporte l'utilisation du procédé générateur.

IV Annexe

Considérons la propriété de récurrence définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par : $\mathscr{H}(n)$ = « Si Φ est une application polynomiale de p variables, nulle sur $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \ldots \times \mathscr{E}_p$, où $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_p$ sont p ensembles de cardinal infini, alors Φ est identiquement nulle. » Pour $p = 1$, si Φ est une application polynomiale non nulle d'une seule variable, alors, en notant $d \in \mathbb{N}^*$ son degré, elle a au plus d zéros ; en contraposant, on a donc montré $\mathscr{H}(1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}(p)$ soit vraie. Soit Φ une application polynomiale de $p+1$ variables, nulle sur $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \ldots \times \mathscr{E}_{p+1}$, où $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_{p+1}$ sont $p+1$ ensembles de cardinal infini. Pour tout $y_{p+1} \in \mathscr{E}_{p+1}$, on définit $\Psi_{y_{p+1}}$, fonction polynomiale de p variables, par : $\Psi_{y_{p+1}}(Y_1, \ldots, Y_p) = \Phi(Y_1, \ldots, Y_p, y_{p+1})$; pour tout y_{p+1}, $\Psi_{y_{p+1}}$ vérifie $\mathscr{H}(p)$ sur $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \ldots \times \mathscr{E}_p$, donc $\Psi_{y_{p+1}}$ est identiquement nulle. De plus, il existe des polynômes d'une seule variable $(P_{n_1 \ldots n_p})_{(n_1 \ldots n_p) \in (\mathbb{N}^p)}$ tels que, pour tout y_{p+1}, on ait Ψ_{p+1} sous la forme : $\Psi_{p+1} = \sum P_{n_1 \ldots n_p}(y_{p+1}).Y^{n_1} \ldots Y^{n_p}$; chaque fonction $\Psi_{y_{p+1}}$ étant nulle, on en déduit que toutes les fonctions polynomiales associées aux polyômes $P_{n_1 \ldots n_p}$ s'annulent sur $\mathscr{E}_{p+1}$: elles vérifient donc $\mathscr{H}(1)$. Ainsi, $\forall n_1, \ldots, n_p, P_{n_1 \ldots n_p} = 0$, d'où $\Phi(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) = \sum P_{n_1 \ldots n_p}(Y_{p+1}).Y^{n_1} \ldots Y^{n_p} = 0$: Φ est nulle. On a donc montré $\mathscr{H}(p+1)$; et $\mathscr{H}$ sur $\mathbb{N}^*$.

Références

[1] Exercices de Mathématiques, Oraux X-Ens Algèbre 2, Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, 2.71. Similitude et extension de corps, Cassini.

1. $A \in \mathscr{M}_n(K)$, donc $\forall i, j, \alpha_{i,j} \in K$. Or $\mathbb{Q} \subset K$, d'où : $\mathscr{E} = \{\alpha_{i,j} + q \mid q \in \mathbb{Q} \cap [-r; r]\} \subset B(A,r)_{\mathbb{C}}$ et $\mathscr{E}$ est de cardinal infini.
2. La démonstration est donnée en annexe.