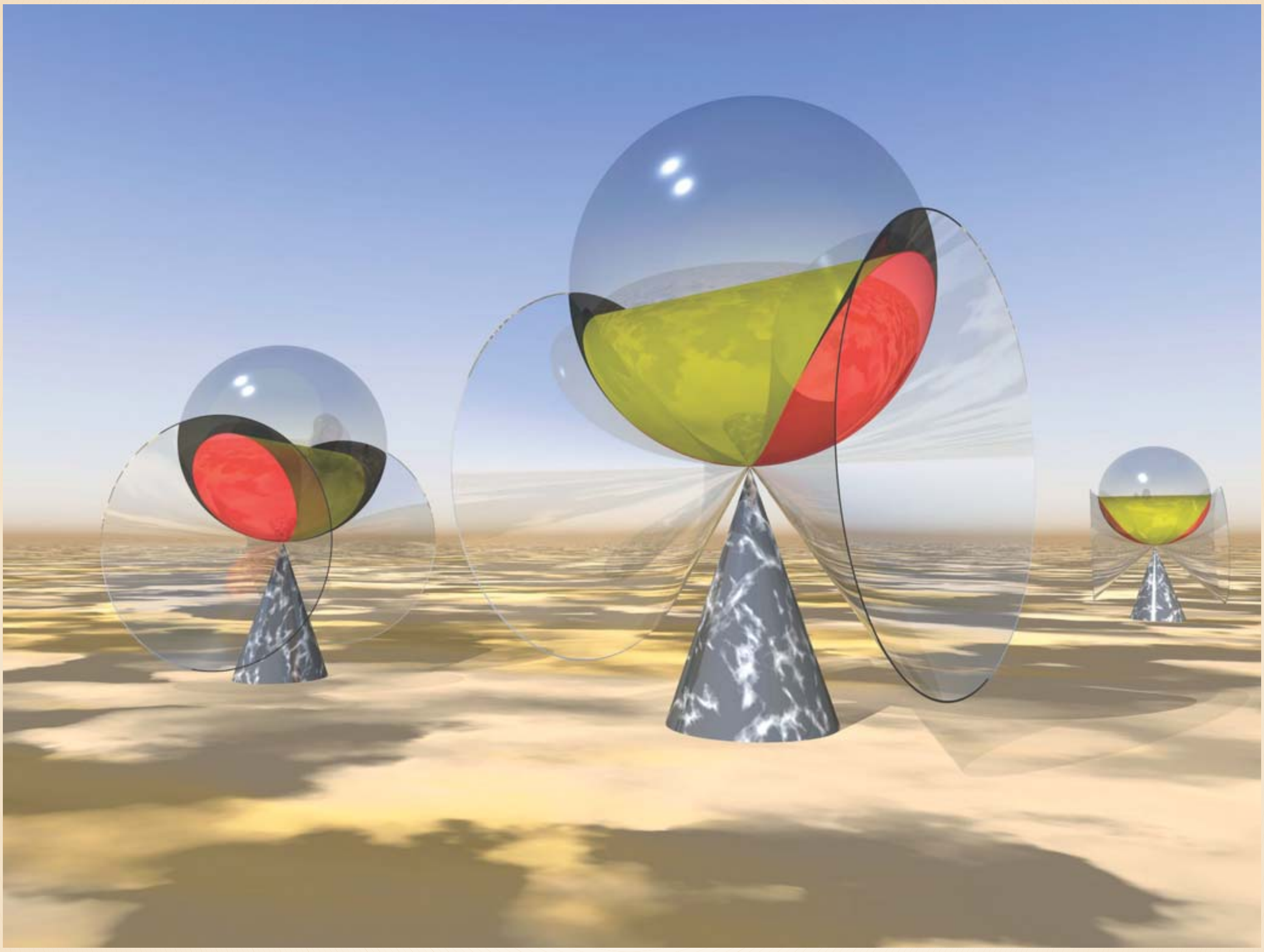
Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde



n° 57
Magazine trimestriel
Juillet–Septembre 2005
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Étude de familles de polynômes (II)

par Julien Grivaux*

Introduction

Nous avons étudié, dans le numéro précédent, les coefficients des polynômes H_n définis par $\left(\frac{1}{\sin z}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin z} H_n(\cotan z)$. Le polynôme H_n est de degré n, de coefficient dominant $n!$, et a la parité de n. Le coefficient de X^{n-2k} dans H_n est lui-même de la forme $n!\,\tau_k(n)$ où (τ_k) est la suite de polynômes définie par récurrence par

$$\begin{cases} \tau_0 = 1, \\ \forall k \geq 1, \quad (X+1)\,\tau_k(X+1) = (X+1-2k)\,\tau_k(X) \\ \qquad\qquad + (X+2-2k)\,\tau_{k-1}(X). \quad (\mathrm{E_k}) \end{cases}$$

Le polynôme τ_n est de degré n et de coefficient dominant 3^n.

L'étude de la famille des polynômes (τ_k) effectuée en première partie conduit naturellement à formuler une conjecture dont la résolution, exposée en deuxième partie, est due à Joseph Oesterlé. Les résultats ainsi obtenus peuvent être appliqués à des familles de polynômes connues : polynômes de Bernoulli, Hermite, Laguerre.

I Étude de la famille (τ_k)

I.1 Fonction génératrice

Considérons la série formelle $\psi_t(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau_p(t)\,X^p$. Alors $\psi_t(0) = 1$ et en sommant $(\mathrm{E_p})$ en p, nous obtenons

$$(t+1)\,\psi_{t+1}(X) = (t+1+X)\,\psi_t(X) - 2X(1+X)\,\psi_t'(X).$$

En particulier pour $t = -1$, $\psi_{-1}(X) = \frac{1}{\sqrt{1+X}}$.

Théorème 1. *(i) Pour tout p entier, $p \geq 2$, et tout $x \geq 0$,*

$$\psi_{-p}(x) = \frac{p-1}{2(\sqrt{x})^{p-1}\sqrt{1+x}} \int_0^x \frac{\psi_{-p+1}(u)}{(\sqrt{u})^{-p+3}\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u.$$

(ii) Pour tout entier p, $p \geq 2$, $\psi_{-p}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \times \left(\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{p-1}$.

Démonstration. (i) L'équation différentielle homogène $y' + \frac{p(1+x)-1}{2x(1+x)}\,y = 0$ admet, pour $x > 0$, la solution $\frac{(\sqrt{x})^{-p+1}}{\sqrt{1+x}}$. Cherchons ψ_{-p} de la forme $\psi_{-p}(x) = \lambda(x)\,\frac{(\sqrt{x})^{-p+1}}{\sqrt{1+x}}$. Pour $x > 0$, $\lambda'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(p-1)\psi_{-p+1}(x)}{(\sqrt{x})^{-p+3}\sqrt{1+x}}$. Donc, lorsque x tend vers 0^+, $\lambda'(x) \sim \frac{p-1}{2(\sqrt{x})^{-p+3}}$. Pour $p > 1$, $(-p+3)/2 < 1$, donc $\int_0^x \frac{1}{(\sqrt{u})^{-p+3}}\,\mathrm{d}u$ existe. Par équivalence, $\int_0^x \lambda'(u)\,\mathrm{d}u$ existe, donc $\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \lambda'(u)\,\mathrm{d}u = 0$. Or $\psi_{-p}(x)\sqrt{1+x}$ vaut 1 pour $x = 0$. Donc $\lambda(x)(\sqrt{x})^{-p+1}$ tend vers 1 quand x tend vers 0^+, donc $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = 0$. Cela prouve que $\lambda(x) = \int_0^x \lambda'(u)\,\mathrm{d}u$ et donc

$$\psi_{-p}(x) = \frac{p-1}{2}\left(\int_0^x \frac{\psi_{-p+1}(u)}{(\sqrt{u})^{-p+3}\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u\right) \times \frac{1}{(\sqrt{x})^{p-1}\sqrt{1+x}}.$$

(ii) Pour $p = 2$,

$$\int_0^x \frac{\psi_{-p+1}(u)}{(\sqrt{u})^{-p+3}\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{1}{(1+u)\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\arctan\sqrt{x}.$$

Donc

$$\psi_{-2}(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}.$$

* julien.grivaux@free.fr

Procédons alors par récurrence, en utilisant :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u}}\left(\frac{\arctan\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)^{p-2} &\times \frac{1}{(\sqrt{u})^{-p+3}}\times\frac{1}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^x \frac{1}{1+u}\left(\arctan\sqrt{u}\right)^{p-2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}(\arctan t)^{p-2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{p-1}\arctan\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Nous obtenons alors facilement $\psi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \times \left(\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{-t-1}$. □

I.2 Étude des coefficients des polynômes τ_n

Posons $\sigma_n(X) = 3^n\tau_n(X)$. Pour tout n, σ_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $1/n!$.

Théorème 2. *Il existe une unique suite $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$, où Q_j est un polynôme de degré j, telle que pour tout entier n,*

$$\sigma_n(X) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(n)\,\frac{X^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Démonstration. Soit $Q_j(n)$ le coefficient de $\frac{X^{n-j}}{(n-j)!}$ dans σ_n. Alors $Q_j(n) = \sigma_n^{(n-j)}(0)$. Pour tout n, $Q_0(n) = \sigma_n^{(n)}(0) = 1$, donc $Q_0 = 1$.

Supposons que les polynômes $Q_0,\dots,Q_{k-1}$, $(k \geq 1)$ aient été construits et soient de degrés $1, 2, \dots k-1$. D'après $(\mathrm{E_n})$ nous avons

$$(X+1)\,\sigma_n(X+1) = (X+1-2n)\,\sigma_n(X) + 3(X+2-2n)\,\sigma_{n-1}(X),$$

soit

$$(X+1)\,(\sigma_n(X+1)-\sigma_n(X)) + 2n\sigma_n(X) = 3(X+2-2n)\,\sigma_{n-1}(X). \quad (*)$$

Pour $n = k$ et $x = 0$, nous obtenons

$$\sigma_k(1) - \sigma_k(0) + 2k\,Q_k(k) = 6(1-k)\,Q_{k-1}(k-1),$$

c'est-à-dire

$$2k\,Q_k(k) = -\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(k)}{(k-j)!} + 6(1-k)\,Q_{k-1}(k-1).$$

Pour $n \geq k+1$, en dérivant $(n-k)$ fois la relation $(*)$:

$$\begin{aligned}(X+1)&\left(\sigma_n^{(n-k)}(X+1) - \sigma_n^{(n-k)}(X)\right)\\ &+ (n-k)\left(\sigma_n^{(n-k-1)}(X+1) - \sigma_n^{(n-k-1)}(X)\right)\\ &+ 2n\,\sigma_n^{(n-k)}(X) =\\ &3(X+2-2n)\,\sigma_{n-1}^{(n-k)}(X) + 3(n-k)\,\sigma_{n-1}^{(n-k-1)}(X).\end{aligned}$$

D'où pour $x = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(n-k)}(1) &- Q_k(n) + (n-k)\\ &\times\left(\sigma_n^{(n-k-1)}(1) - Q_{k+1}(n)\right) + 2n\,Q_k(n) =\\ &6(1-n)\,Q_{k-1}(n-1) + 3(n-k)\,Q_k(n-1).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sigma_n(X) &= Q_0(n)\,\frac{X^n}{n!} + Q_1(n)\,\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\\ &+ \cdots + Q_{k-1}(n)\,\frac{X^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\\ &+ Q_k(n)\,\frac{X^{n-k}}{(n-k)!} + \cdots\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(n-k)}(X) &= Q_0(n)\,\frac{X^k}{k!} + Q_1(n)\,\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}\\ &+ \cdots + Q_{k-1}(n)\,X + Q_k(n).\end{aligned}$$

D'où

$$\sigma_n^{(n-k)}(1) - Q_k(n) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(n)}{(k-j)!}$$

et

$$\sigma_n^{(n-k-1)}(1) - Q_{k+1}(n) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(n)}{(k+1-j)!} + Q_k(n).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(n)}{(k-j)!} &+ (n-k)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(n)}{(k+1-j)!} + (3n-k)\,Q_k(n)\\ &= 6(1-n)\,Q_{k-1}(n-1) + 3(n-k)\,Q_k(n-1).\end{aligned}$$

Soit T_k le polynôme défini par

$$\begin{aligned}T_k(X) = -\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(X)}{(k-j)!} &- (n-k)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Q_j(X)}{(k+1-j)!}\\ &+ 6(1-X)\,Q_{k-1}(X-1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}T_k(X) = -\sum_{j=0}^{k-1}\frac{n+1-j}{(k+1-j)!}Q_j(X)&\\ &+ 6(1-X)\,Q_{k-1}(X-1).\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq k$:

$$(3n - k)\, Q_k\,(n) - 3(n - k)\, Q_k\,(n - 1) = T_k(n).$$

Si Q_k existe, nécessairement $(3X - k)\, Q_k\,(X) - 3(X - k)\, Q_k\,(X - 1) = T_k(X)$. L'application

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}_k[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_k[X] \\ P &\longmapsto (3X - k)\, P(X) - 3(X - k)\, P(X - 1) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui conserve les degrés, donc c'est un isomorphisme. Le polynôme T_k est de degré k, donc il existe un unique polynôme Q_k, de degré k, tel que $\delta(Q_k) = T_k$. □

Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante :

Définition. Une suite (A_n) de polynômes est dite *parfaite* si :
- pour tout entier n, le degré de A_n est au plus n ;
- il existe une suite (B_n) de polynômes telle que
  - pour tout n, $\deg B_n \leq n$;
  - pour tout n, $A_n(t) = \sum_{j=0}^{n} B_j(n)\, \frac{t^{n-j}}{(n-j)!}$.

La suite (B_n) s'appelle la *filleule* de la suite (A_n).

Si a est un réel non nul, une suite (A_n) de polynômes est *presque parfaite de coefficient* a si la suite $\left(\frac{A_n}{a^n}\right)$ est parfaite.

La suite $(A_n) = (3^n\, \tau_n)$ est donc parfaite et sa filleule est la suite Q_n. Nous pouvons penser que la suite $((-13/10)^n\, Q_n)$ est parfaite et formuler la conjecture suivante :

Conjecture. *Il existe une suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rationnels non nuls tels que : pour tout $m \geq 0$, il existe une suite $(\tau_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, où $\tau_{0,n} = \tau_n$, telle que la suite $(\tau_{m,n}/a_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit parfaite et ait pour filleule $(\tau_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les suites $(\tau_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors uniques.*

Cette conjecture est exacte. La démonstration, due à Joseph Oesterlé, en est donnée ci-après.

II Construction des suites de polynômes issues de τ_n

II.1 Fonction génératrice de (H_n) et de τ_n

Théorème 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\,(t)}{n!}\, u^n = \frac{1}{\cos u - t\, \sin u}.$$

Démonstration. En posant $t = \tan x$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} H_n\,(t)\, \frac{u^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} H_n\,(\tan x)\, \frac{u^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos x \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{(n)} \frac{u^n}{n!} \\ &= \cos x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{(n)} \frac{((u+x)-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons le développement en série entière de $u \longmapsto \frac{1}{\cos(x+u)}$ en x, donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} H_n\,(t)\, \frac{u^n}{n!} &= \cos x\, \frac{1}{\cos(x+u)} \\ &= \frac{1}{\cos u - \tan x \sin u} \\ &= \frac{1}{\cos u - t \sin u}. \end{aligned}$$ □

Posons $\overline{H}_n\,(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \tau_k\,(n)\; t^{n-2k}$.

Théorème 4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_k\,(t)\; u^k = \frac{1}{\sqrt{1+u}}\, \frac{\sqrt{u}}{\arctan\sqrt{u}} \left(\frac{\arctan\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)^{-t}.$$

Démonstration. Nous avons vu que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!}\, u^n = \frac{1}{\cos u - t\, \sin u}$. Les deux membres sont développables en série double en (t, u). Le coefficient de $t^{n-2k} u^n$ au premier membre est $\tau_k\,(n)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos u - t\, \sin u} &= \frac{1}{\cos u}\, \frac{1}{1 - t\, \tan u} \\ &= \frac{1}{\cos u} \sum_{p=0}^{\infty} t^p\, (\tan u)^p\,. \end{aligned}$$

$\tau_k\,(n)$ est donc le coefficient de u^n dans le développement de $\frac{(\tan u)^{n-2k}}{\cos u}$, c'est-à-dire le résidu en 0 de $\frac{(\tan u)^{n-2k}}{u^{n+1} \cos u}$. En effectuant le changement de variable $v = \tan u$, nous voyons que c'est également le résidu au point 0 de la fonction $\left(\frac{v}{\arctan v}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \times \frac{1}{v^{2k+1}}$, c'est-à-dire le coefficient de v^{2k} dans le développement de $\left(\frac{v}{\arctan v}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$. Cette dernière fonction est paire. Donc le coefficient de $\left(v^2\right)^k$ de son développement est le coefficient de u^k du développement de $\left(\frac{\sqrt{u}}{\arctan\sqrt{u}}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+u}}$. □

II.2 Étude des suites parfaites

Une fonction $\phi(t,u) = f(u)\,(h(u))^{-t}$ vérifie la condition

$$\mathscr{C} \qquad \text{si} \begin{cases} f \text{ et } h \text{ sont développables} \\ \text{en série entière} \\ \text{au voisinage de } 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathscr{C}_a \quad \text{où } a \neq 0 \qquad \text{si} \begin{cases} f \text{ et } h \text{ sont développables} \\ \text{en série entière} \\ \text{au voisinage de } 0 \\ h(0) = 1 \text{ et } h'(0) = -a \end{cases}$$

Ainsi, la fonction génératrice de (τ_n) vérifie $\mathscr{C}_{1/3}$. Dans le cas général, nous pouvons préciser la forme du développement de ϕ :

Théorème 5. *Si ϕ vérifie la condition $\mathscr{C}$,*

$$\phi(t,u) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(t)\,u^k$$

où λ_k est un polynôme de degré au plus k.

Démonstration. La fonction ϕ est développable en série double en (t,u). Dans ce développement, le coefficient de u^j est $\frac{[f(u)\,(h(u))^{-t}]^{(j)}(0)}{j!}$, la dérivée étant prise par rapport à u. Pour $j = 1$,

$$\begin{aligned}\left[f(u)\,(h(u))^{-t}\right]' &= f'(u)\,(h(u))^{-t} - t f(u) h'(u)\,(h(u))^{-t-1} \\ &= \sum_{k=0}^{1} L_k(t,u)\,(h(u))^{-t-k}\,.\end{aligned}$$

$L_0(t,u) = f'(u)$, $L_1(t,u) = -t\,f(u)\,h'(u)$, donc pour $k = 0$ et $k = 1$, $L_k(t,u)$, considéré comme fonction de t est un polynôme de degré au plus k.

Par récurrence, $\left[f(u)\ (h(u))^{-t}\right]^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} L_k(t,u) \times (h(u))^{-t-k}$ où L_k est un polynôme en t de degré au plus k. Donc $\lambda_j(t) = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j} L_k(t,0)$, et λ_j est un polynôme en t de degré au plus j. □

Nous retrouvons ainsi :

Corollaire. *Pour tout entier k, τ_k est un polynôme de degré au plus k.*

Les suites parfaites s'étudient à l'aide de leurs fonctions génératrices. Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 6. *Soit (A_n) une suite de polynômes telle que, pour tout n, $\deg A_n \leq n$, dont la fonction génératrice $\phi(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\,u^n$ est de la forme $\phi(t,u) = f(u)(h(u))^{-t}$ et vérifie $\mathscr{C}_1$. La suite (A_n) est parfaite et sa filleule (B_n) a pour fonction génératrice $\Phi(t,u) = F(u)(H(u))^{-t}$, où*

$$\begin{cases} u\,H(u) \text{ est la réciproque de } -\log h \\ F(u) = f(uH(u))\left(1 + u\,\dfrac{H'(u)}{H(u)}\right). \end{cases}$$

De plus Φ vérifie $\mathscr{C}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\,u^n &= f(u)\,(h(u))^{-t} \\ &= f(u)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left[-t\ \log(h(u))\right]^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(u)\left[-\log(h(u))\right]^k}{k!}\,t^k.\end{aligned}$$

Posons $A_n(t) = \sum_{j=0}^{n} B_j(n)\,\frac{t^{n-j}}{(n-j)!}$. $B_j(n)$ est le coefficient de $\frac{t^{n-j}}{(n-j)!}\,u^n$. C'est donc le coefficient de u^n dans $f(u)\,[-\log(h(u))]^{n-j}$, c'est-à-dire le résidu en 0 de $\frac{f(u)[-\log(h(u))]^{n-j}}{u^{n+1}}$. Posons $g(u) = -\log(h(u))$. Comme $h(0) = 1$ et $h'(0) = -1$, $g'(0) = 1$, donc g est inversible au voisinage de 0. Notons γ sa fonction réciproque. On a $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 1$. Le résidu en 0 de $\frac{f(u)\left(g(u)\right)^{n-j}}{u^{n+1}}$ est le résidu en 0 de $\frac{f(\gamma(v))\,v^{n-j}}{(\gamma(v))^{n+1}}\,\gamma'(v)$, c'est-à-dire le coefficient de v^n dans $\frac{f(\gamma(v))\,v^{n-j}}{(\gamma(v))^{n+1}}\,v^{n+1}\,\gamma'(v)$, c'est-à-dire le coefficient de v^j dans $\frac{f(\gamma(v))}{(\gamma(v))^{n+1}}\,v^{n+1}\,\gamma'(v)$. Posons

$$F(v) = f(\gamma(v))\,\gamma'(v)\,\frac{v}{\gamma(v)}, \quad H(v) = \frac{\gamma(v)}{v}, \quad \text{et} \quad \Phi(t,v) = F(v)(H(v))^{-t}.$$

Comme $\gamma'(0) = 1$, $H(0) = 1$, et Φ vérifie $\mathscr{C}$. Donc $\Phi(t,v) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j(t)\,v^j$ où λ_j est un polynôme de degré au plus j.

$B_j(n)$ est le coefficient de v^j dans $\Phi(n,v)$, donc c'est $\lambda_j(n)$. Cela montre que la suite (A_n) est parfaite. Sa filleule est (B_j) et Φ est la fonction génératrice de (B_j). Enfin $\gamma(v) = v\,H(v)$, d'où $F(v) = f(v\,H(v))\left(1 + v\,\frac{H'(v)}{H(v)}\right)$. □

Lorsque ϕ vérifie $\mathscr{C}_a$, $a \neq 1$, nous pouvons nous ramener à la situation précédente par le

Théorème 7. *Soit (A_n) une suite de polynômes telle que pour tout n, $\deg A_n \leq n$ et dont la fonction* *génératrice ϕ, de la forme $\phi(t,u) = f(u)\,(h(u))^{-t}$, vérifie $\mathscr{C}_a$. Alors*

(i) la fonction ϕ_a définie par $\phi_a(t,u) = \phi(t,u/a)$ vérifie $\mathscr{C}_1$;

(ii) la suite (A_n) est presque parfaite de coefficient a et la fonction génératrice de la suite $\left(\frac{A_n}{a^n}\right)$ est ϕ_a.

Démonstration. (i) En dérivant par rapport à u,

$$\left[h\left(\frac{u}{a}\right)\right]'_{u=0} = \frac{1}{a}\,h'\left(\frac{u}{a}\right)_{u=0} = \frac{1}{a}\,h'(0) = -1.$$

(ii) $\phi_a(t,u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)\left(\frac{u}{a}\right)^n$, donc ϕ_a est la fonction génératrice de $\left(\frac{A_n}{a^n}\right)$; ϕ_a vérifie $\mathscr{C}_1$, donc $\left(\frac{A_n}{a^n}\right)$ est parfaite. □

Il en résulte :

Corollaire. *La suite (τ_n) est presque parfaite de coefficient* $1/3$.

Le théorème suivant utilise l'anneau $\mathbb{Z}_2$ des entiers dyadiques. Rappelons ici les éléments nécessaires à la compréhension.

Définition. Si r est un rationnel non nul, la *valuation dyadique* de r, notée $v_2(r)$, est l'entier relatif n défini par $r = 2^n\,a/b$ où a et b sont impairs.

Propriété. *Un rationnel appartient à $\mathbb{Z}_2$ si et seulement si sa valuation dyadique est positive.*

Notation. $\mathbb{Z}_2\,[[u]]$ est l'anneau des séries en u à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

Théorème 8. *Soit (A_n) une suite de polynômes telle que, pour tout n, $\deg(A_n) \leq n$ et dont la fonction génératrice $\phi(t,u) = f(u)\,(h(u))^{-t}$ vérifie $\mathscr{C}_a$ ($a \neq 0$). Si $h(u/a)$ appartient à $\mathbb{Z}_2\,[[u]]$, on peut définir pour tout entier m la suite $(A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ par*

- *$A_{0,n} = A_n$ pour tout entier n ;*
- *pour tout entier m, la fonction génératrice de $(A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $f_m(u)\,(h_m(u))^{-t}$; elle vérifie $\mathscr{C}_{a_m}$, ($a_m \neq 0$) et $h_m(u/a_m)$ appartient à $\mathbb{Z}_2\,[[u]]$.*

Alors, pour tout entier m, $(A_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la filleule de $(A_{m,n}/a_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$$h_m\left(\frac{x\,h_{m+1}(x)}{a_m}\right) = e^{-x}.$$

Démonstration. La démonstration du théorème utilise le résultat suivant :

Lemme. *Si $g(u) = u + a_2u^2 + \cdots$ est une série à coefficients dans un anneau $\mathcal{A}$, il existe une série $\gamma(u) = u + b_2u^2 + \cdots$ à coefficients dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma(g(u)) = u$, et on a $b_2 = -a_2$.*

Démonstration. Cherchons les coefficients successifs de u^n dans $\gamma(g(u))$ où $\gamma(u) = u+b_2u^2+\cdots$: pour $n \geq 2$, en posant $a_1 = b_1 = 1$, b_n est somme pour k variant de 1 à $n-1$ de produits $b_k\,a_{i_1}\ldots a_{i_k}$ où $i_1,\ldots,i_k$ appartiennent à $\{1,\ldots,n\}$. Alors $b_2 = -a_2$ et par récurrence b_n est dans $\mathcal{A}$. □

La fonction génératrice de (A_n/a^n) est $\widetilde{f_0}(u)\,(\widetilde{h_0}(u))^{-t}$ et nous avons $\widetilde{h_0}(u) = 1-u+u^2\,\mathbb{Z}_2\,[[u]]$.

Supposons que pour $1 \leq k \leq m$ on ait pu définir $(A_{k,n})$ comme la filleule de $\left(A_{k-1,n}/a_{k-1}^n\right)$ comme il est dit dans le théorème 6. La fonction génératrice de $A_{m,n}$ est alors de la forme $f_m(u)\,(h_m(u))^{-t}$. Supposons qu'elle vérifie la condition $\mathscr{C}_{a_m}$, ($a_m \neq 0$), et que, en posant $\widetilde{h_m}(u) = h_m(u/a_m)$, on ait $\widetilde{h_m}(u) = 1 - u + b\,u^2 + u^3\,\mathbb{Z}_2\,[[u]]$, où $b \in \mathbb{Z}_2$.

Le théorème 7 montre alors que la suite $(A_{m,n}/a_m^n)$ est parfaite ; sa fonction génératrice est $\widetilde{f_m}(u)\,(\widetilde{h_m}(u))^{-t}$. En appliquant le théorème 6, nous pouvons définir sa filleule $(A_{m+1,n})$ dont la fonction génératrice est $f_{m+1}(u)\,(h_{m+1}(u))^{-t}$, où $h_{m+1}(u) = \gamma(u)/u$ et γ est la réciproque de $g = -\log\widetilde{h_m}$. Or $g(u) = u + \left(\frac{1}{2} - b\right)u^2 + u^3\,\mathbb{Q}\,[[u]]$, donc d'après le lemme, $\gamma(u) = u - \left(\frac{1}{2} - b\right)u^2 + u^3\,\mathbb{Q}\,[[u]]$, donc $h_{m+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - b\right)u + u^2\,\mathbb{Q}\,[[u]]$. D'où $a_{m+1} = -h'_{m+1}(0) = \frac{1}{2} - b$. Or $b \in \mathbb{Z}_2$, donc $\frac{1}{2} - b \neq 0$, donc $a_{m+1} \neq 0$. La fonction h_{m+1} vérifie bien la condition $\mathscr{C}_{a_{m+1}}$. De plus

$$\widetilde{h}_{m+1}(u) = h_{m+1}\left(\frac{u}{-b+1/2}\right) = h_{m+1}\left(\frac{2u}{1-2b}\right).$$

Or $v_2(1-2b) = 0$, donc les coefficients de $h_{m+1}\left(\frac{2u}{1-2b}\right)$ ont même valuation dyadique que ceux de $h_{m+1}(2u)$; $h_{m+1}(2u) = \gamma(2u)/2u$, donc à nouveau les coefficients de $h_{m+1}(2u)$ ont même valuation dyadique que ceux de $\gamma(2u)/2$. Or $\gamma(2u)/2 = u+u^2\,\mathbb{Q}\,[[u]]$, et $g(2u)/2$ est la réciproque de $\gamma(2u)/2$. Comme $g(u) = -\log\widetilde{h_m}(u)$, $g(u)$ est une série en $\widetilde{h_m}(u) - 1$. Or $\widetilde{h_m}(u) - 1$ est une série à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Donc $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\,\frac{u^n}{n}$, donc $g(2u)/2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\,\frac{2^{n-1}}{n}\,u^n$ où $\alpha_n \in \mathbb{Z}_2$. Pour $n \geq 1$, $n \leq 2^{n-1}$, donc $v_2(n) \leq n-1$. Cela entraîne que $v_2(2^{n-1}/n) \geq 0$ et donc que $g(2u)/2 \in \mathbb{Z}_2\,[[u]]$. D'après le lemme, $\gamma(2u)/2 \in \mathbb{Z}_2\,[[u]]$, donc $\widetilde{h}_{m+1} \in \mathbb{Z}_2\,[[u]]$. Nous avons donc $\widetilde{h}_{m+1}(u) = 1-u+u^2\mathbb{Z}_2\,[[u]]$, ce qui achève de prouver la récurrence.

Nous avons $g(u) = -\log\widetilde{h_m}(u)$, donc $\widetilde{h_m}(u) = e^{-g(u)}$. En posant $u = \gamma(x)$ et en utilisant $\gamma(x) = x\,h_{m+1}(x)$, nous obtenons $h_m\left(\frac{x\,h_{m+1}(x)}{a_m}\right) = e^{-x}$. □

Définition. La famille $\left((A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une *famille parfaite* si pour tout m de $\mathbb{N}$ la suite $(A_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est presque parfaite et $A_{m+1,n}$ est la filleule de la suite parfaite associée à $A_{m,n}$.

Comme la fonction génératrice de (τ_n) vérifie $\mathscr{C}_{1/3}$, avec $h_0(u) = \frac{\arctan\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$, $h_0(3u)$ appartient à $\mathbb{Z}_2[[u]]$, et nous en déduisons le

Corollaire. *La famille* $\left((\tau_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ *construite en posant pour tout n,* $\tau_{0,n} = \tau_n$ *est une famille parfaite.*

III Applications

III.1 Polynômes de Bernoulli

La suite (B_n) des polynômes de Bernoulli est définie par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!} u^n = \frac{u\, e^{t\,u}}{e^u - 1}.$$

La fonction génératrice de $\frac{B_n(t)}{n!}$ est $f(u)\,(h(u))^{-t}$ où $f(u) = \frac{u}{e^u-1}$ et $h(u) = e^{-u}$. Elle vérifie $\mathscr{C}_1$. Nous avons donc

Proposition 1. *(i) La suite* $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ *est parfaite.*

(ii) Sa filleule a comme fonction génératrice $F(u)\,(H(u))^{-t}$ *où* $F(u) = f(u)$ *et* $H(u) = 1$.

En appelant (C_n) la filleule de $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(t)u^n = \frac{u}{e^u-1}$, donc $C_n(t) = \frac{B_n(0)}{n!}$. En écrivant que $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ est parfaite et que $\frac{B_n(0)}{n!}$ est sa filleule, nous obtenons l'identité connue :

Proposition 2.

$$B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j\, B_j(0)\, t^{n-j}.$$

III.2 Polynômes d'Hermite

Si (H_n) est la suite des polynômes d'Hermite, nous avons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(t)}{n!} u^n = e^{2tu-u^2}.$$

En posant $\phi(t,u) = f(u)\,(h(u))^{-t}$ où $f(u) = e^{-u^2}$ et $h(u) = e^{-2u}$, ϕ vérifie $\mathscr{C}_2$ donc

Proposition 3. *(i) La suite* $\left(\frac{H_n}{2^n\, n!}\right)$ *est parfaite.*

(ii) Sa filleule a comme fonction génératrice $F(u)\,(H(u))^{-t}$ *où* $F(u) = e^{-u^2/4}$ *et* $H(u) = 1$.

La filleule de $\left(\frac{H_n}{2^n\, n!}\right)$ est $\left(\frac{H_n(0)}{2^n\, n!}\right)$. Comme $H_{2k+1}(0) = 0$ et $H_{2k}(0) = (-1)^k$, nous retrouvons :

Proposition 4.

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k}\,(-1)^k\,(2t)^{n-2k}.$$

III.3 Polynômes de Laguerre

Ils vérifient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n^\alpha(t)\, u^n = (1-u)^{-\alpha-1} e^{-tu/(1-u)} \qquad (\alpha > -1).$$

Ici la fonction génératrice est $\phi(t,u) = f(u)\,(h(u))^{-t}$ où $f(u) = (1-u)^{-\alpha-1}$ et $h(u) = e^{u/(1-u)}$. La fonction ϕ vérifie $\mathscr{C}_{-1}$, donc

Proposition 5. *(i)* $((-1)^n\, L_n^\alpha)$ *est parfaite.*

(ii) Sa filleule a comme fonction génératrice $F(u)\,(H(u))^{-t}$ *où* $F(u) = (1-u)^\alpha$ *et* $H(u) = \frac{1}{1-u}$.

Nous en déduisons, en appelant (B_j) la filleule de $((-1)^n\, L_n^\alpha)$,

$$B_j(n) = \frac{(-1)^j}{j!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+n-j+1)$$

et nous retrouvons comme précédemment :

Proposition 6.

$$L_n^\alpha(t) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\times\frac{t^k}{k!}.$$

(en notant $(a)_0 = 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $(a)_n = a\,(a+1)\dots(a+n-1)$*).*

Nous voyons ici que la fonction génératrice de (B_j) vérifie $\mathscr{C}_{-1}$; comme $H(-u) = \frac{1}{1+u}$, $H(-u)$ appartient à $\mathbb{Z}_2[[u]]$. Nous pouvons donc définir à partir de B_j une famille parfaite, et finalement :

Proposition 7. *On peut définir, à partir de la suite* $(L_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha > -1)$ *des polynômes de Laguerre, une famille parfaite de polynômes.*

Conclusion

La conjecture formulée a donc été complètement résolue, dans un cadre un peu plus large que celui de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Au cours de cette étude sont apparues des propriétés remarquables de la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ liée à la famille parfaite $((\tau_{m,n})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$.

Il semble que pour $m \geq 1$, le rationnel f_m, où $f_m = \left|\text{dénominateur}(a_m)\right| / (\text{numérateur}(a_{m-1}))^2$ soit un entier. La décomposition en facteurs premiers des premiers termes est la suivante :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 2 \times 5\\
f_2 &= 2 \times 3 \times 7\\
f_3 &= 2\\
f_4 &= 2 \times 3 \times 11\\
f_5 &= 2 \times 5\\
f_6 &= 2 \times 3\\
f_7 &= 2 \times 17\\
f_8 &= 2 \times 3 \times 7 \times 19\\
f_9 &= 2 \times 5\\
f_{10} &= 2 \times 3 \times 23\\
f_{11} &= 2\\
f_{12} &= 2 \times 3\\
f_{13} &= 2 \times 5 \times 29\\
f_{14} &= 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 31\\
f_{15} &= 2\\
f_{16} &= 2 \times 3\\
f_{17} &= 2 \times 5 \times 37
\end{aligned}
$$

L'entier 2 apparaît dans tous, ce qui découle de la démonstration du théorème 8. Les nombres premiers p tels que 3, 5, 7, 11, 17, semblent figurer avec la périodicité $p - 1$: pour les premières valeurs de m ils sont facteur premier de f_m si et seulement si $m \equiv (p-3)/2 \mod (p-1)$. Certains nombres premiers (comme 13 par exemple) n'obéissent pas à cette règle. Remarquons qu'ils apparaissent au numérateur des a_m : $a_1 = -13/10$.

D'autre part, Joseph Oesterlé a prouvé que le numérateur de $a_{m+1} - a_m$ est multiple de 2^{2m-2} pour $m \geq 1$; la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $\mathbb{Z}_2$. Pour p premier strictement plus grand que 2, lorsque p apparaît avec la périodicité $p-1$ ($p = 3, 5, 7, 11, 17, \dots$), l'étude numérique des $p-1$ sous-suites $(a_{(p-1)m+q})_{m\in\mathbb{N}}$, $0 \leq q \leq p-2$, montre que la valuation $p-$adique du numérateur de la différence de deux termes consécutifs tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$, donc que chacune de ces sous-suites converge dans $\mathbb{Z}_p$.

* *

QUADRATURE
Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

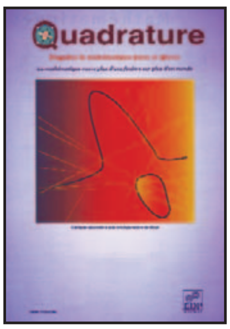
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d’ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N’hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT

Quadrature

❒ Mme ❒ Mlle ❒ M.

Nom ....

Prénom ....

Profession ....

Institution ....

....

Adresse ....

....

....

Code Postal ....

Ville ....

Pays ....

e-mail ....

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❒ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) ....32 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) ....37 €

❒ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❒ **Europe** (TVA 2,1% incluse) ....58 €
- ❒ **Reste du monde** (Hors Taxe) ....68 €

Paiement :

❒ Envoyez-moi une facture proforma
❒ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)
❒ Carte de Crédit :
❒ Visa ❒ Eurocard ❒ American Express
Carte No ....
Date de validité ....

date/signature

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement
17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org