Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde

- Niels Henrik Abel (1802–1829)
- Abel, Tauber... et tutti quanti
- Étude de familles de polynômes
- Le prix Steiner
- Sauts de puce
- Échecs hétérodoxes
- Le principe des paires incomplètes

n° 56
Magazine trimestriel
Avril–Juin 2005
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Étude de familles de polynômes (I)

par Julien Grivaux*

Julien Grivaux est étudiant à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Il a reçu, conjointement avec Pierre Dehornoy, le prix Fermat Junior 2003. On trouvera ci-dessous la première partie de l'étude qui lui a valu ce prix. La deuxième paraîtra dans notre prochain numéro.

Introduction

Les polynômes qui font l'objet de cet article apparaissent lors des dérivations successives de la fonction $1/\sin$:

$$\left(\frac{1}{\sin z}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin z} H_n(\operatorname{cotan} z). \qquad (1)$$

De façon plus générale, si $f'' = -f$, nous avons $\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin z} H_n(\operatorname{cotan} z)$.

H_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$, de degré n, de coefficient dominant $n!$, de la parité de n. La suite (H_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} H_0 = 1, \\ H_{n+1}(X) = XH_n(X) + (1+X^2)\,H_n'(X) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n \in \mathbb{N}). \end{cases} \qquad (\mathrm{R})$$

H_n possède n racines complexes dans $]-i, i[$ et les racines de H_n séparent celles de H_{n+1}, mais les $(-i)^n H_n(ix)$ ne forment pourtant pas une famille de polynômes orthogonaux.

Après l'étude des racines de H_n, une première partie porte sur le comportement des $H_n(x)$ comme fonction de la variable réelle x. La deuxième partie permet de mettre en évidence des relations remarquables entre les coefficients des polynômes H_n, qui conduisent, comme nous le verrons dans un second article, à la construction d'autres familles de polynômes.

J'ai bénéficié sur certains points de l'aide de Monsieur le Professeur J. Oesterlé, et je l'en remercie vivement.

Théorème 1. *H_n possède n racines complexes dans $]-i, i[$ et les racines de H_n séparent celles de H_{n+1}.*

Démonstration. Soit R_n défini par $R_n(x) = H_n(ix)$. D'après (R),

$$R_{n+1}(x) = i\left[x\,R_n(x) - \left(1-x^2\right) R_n'(x)\right].$$

$R_1(x) = ix$. Le polynôme R_1 admet donc une unique racine, 0, dans $]-1, 1[$.

Supposons que R_n, $n \geq 1$, admet n racines dans $]-1, 1[$, distinctes : $-1 < a_1 < \ldots < a_n < 1$. $R_{n+1}(x) = 0$ équivaut à $x\,R_n(x) = \left(1-x^2\right) R_n'(x)$. Ni -1 ni 1 ne sont solutions puisqu'ils ne sont pas racines de R_n ; aucun des a_i n'est solution puisque toutes les racines de R_n sont simples. Donc $R_{n+1}(x) = 0$ équivaut à $\frac{R_n'(x)}{R_n(x)} = \frac{x}{1-x^2}$, soit encore à

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-a_i} - \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Sur chacun des intervalles $]-1, a_1[$, $]a_j, a_{j+1}[$, $1 \leq j \leq n-1$, et $]a_n, 1[$, le premier membre est une fonction continue de x qui décroît strictement de $+\infty$ à $-\infty$, et donc s'annule exactement une fois. Nous obtenons ainsi les $n+1$ racines de R_{n+1}, $b_1, \ldots, b_{n+1}$ et

$$-1 < b_1 < a_1 < \ldots < a_n < b_{n+1} < 1. \qquad \square$$

I Inégalités et comportement à l'infini

Les résultats de cette partie reposent sur deux formules d'analyse complexe relatives à la fonction $\frac{\pi}{\sin \pi z}$:

– la transformée de Mellin :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad (0 < \Re e z < 1); \qquad (2)$$

* julien.grivaux@free.fr

– le développement de Mittag-Leffler :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n-z}\cdot \qquad (3)$$

Nous utiliserons également l'inégalité de Hölder.

En dérivant (2) n fois et en utilisant la définition (1) des H_n, nous obtenons :

Théorème 2. *Pour tout $x \geq 0$, les suites $\left(H_{2n}(x)\right)^{1/2n}$ et $\left(H_{2n+1}(x)\right)^{1/(2n+1)}$ sont croissantes.*

Démonstration. Pour $0 < x < 1$, nous avons $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$. En dérivant n fois sous le signe $\int$,

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^n \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^{n+1}}{\sin(\pi x)}(-1)^n H_n(\operatorname{cotan} \pi x).$$

Pour n pair, $n = 2m$, l'égalité précédente s'écrit $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{\pi}\right)^{2m} \mathrm{d}\mu(t) = H_{2m}(\operatorname{cotan}\pi x)$ où μ est la mesure définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\mathrm{d}\mu(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t} \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,\mathrm{d}t$.

Posons $f(t) = \frac{\ln t}{\pi}$. Comme $(f(t))^{2m} = |f(t)|^{2m}$, en notant $\|\ \|_p$ la norme p associée à la mesure μ, $\|f\|_{2m}^{2m} = H_{2m}(\operatorname{cotan}\pi x)$. Soit q tel que $\frac{1}{2m+2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2m}$. La mesure μ est positive, donc d'après l'inégalité de Hölder : $\|f\|_{2m} \leq \|\mathrm{Id}\|_q \, \|f\|_{2m+2}$. Or $\|\mathrm{Id}\|_q = \int_0^{+\infty} \mu(t)\,\mathrm{d}t = 1$, d'où $\|f\|_{2m} \leq \|f\|_{2m+2}$, c'est-à-dire, pour $0 < x < 1$,

$$(H_{2m}(\operatorname{cotan}\pi x))^{1/2m} \leq (H_{2m+2}(\operatorname{cotan}\pi x))^{1/(2m+2)}.$$

$x \longrightarrow \operatorname{cotan}\pi x$ est une bijection de $]\,0, 1/2\,]$ sur $\mathbb{R}^+$ et H_{2m} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ donc positif sur $\mathbb{R}^+$. Donc, pour tout x positif,

$$(H_{2m}(x))^{1/2m} \leq (H_{2m+2}(x))^{1/(2m+2)}.$$

Pour n impair, $n = 2m + 1$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^{2m+1} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^{2m+2}}{\sin(\pi x)} H_{2m+1}(\operatorname{cotan}\pi x).$$

En écrivant $]\,0, +\infty\,[\, = \,]\,0, 1\,] \cup [\,1, +\infty\,[$ et en posant $u = 1/t$ dans l'intégrale de 1 à $+\infty$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^{2m+1} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\ln t)^{2m+1} \frac{t^{x-1} - t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\int_0^1 \left(-\frac{\ln t}{\pi}\right)^{2m+1} \times \frac{t^{x-1} - t^{-x}}{1+t} \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,\mathrm{d}t = H_{2m+1}(\operatorname{cotan}\pi x).$$

Définissons la mesure μ sur $]\,0, 1]$ par $\mathrm{d}\mu(t) = \frac{t^{x-1}-t^{-x}}{1+t} \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,\mathrm{d}t$ et la fonction f par $f(t) = -\frac{\ln t}{\pi}$. Pour $0 < x \leq 1/2$, μ est une mesure positive et $\int_0^1 \mathrm{d}\mu(t) \leq 1$. Nous obtenons donc $\|f\|_{2m+1}^{2m+1} = H_{2m+1}(\operatorname{cotan}\pi x)$. La démonstration se termine alors comme dans le cas n pair. □

En dérivant n fois (3), nous voyons apparaître la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^{n+1} \sqrt{1+x^2}\; \overline{H}_n(x) & \text{si } x > 0 \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \overline{H}_n(0) & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

où $\overline{H}_n = \frac{H_n}{n!}\cdot$

Théorème 3. *Pour $\alpha > 0$, si $x \geq \alpha$ et si $n \geq 1$,*

$$|u_n(x) - 1| \leq \frac{1}{3^n} + 2\left(\frac{1}{1 + (2\arctan\alpha)/\pi}\right)^n.$$

Démonstration. $\left(\frac{1}{\sin z}\right)^{(n)} = \frac{1}{\sin z} H_n(-\operatorname{cotan} z)$, donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^p \left(\frac{z}{z - p\pi}\right)^{n+1} = \frac{z^{n+1}}{\sin z} \overline{H}_n(\operatorname{cotan} z).$$

Posons $x = \operatorname{cotan} z$ pour $z \in]\,0, \pi/2\,[$. Nous avons $x > 0$. Alors $z = \operatorname{arc\,cotan} x = \arctan 1/x$, donc $\frac{z^{n+1}}{\sin z}\overline{H}_n(\operatorname{cotan} z) = u_n(x)$. L'égalité est encore vraie pour $z = \pi/2$, c'est-à-dire $x = 0$.

Donc pour tout $x \geq 0$,

$$u_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left[\left(\frac{z}{z - p\pi}\right)^{n+1} + \left(\frac{z}{z + p\pi}\right)^{n+1}\right], \quad (n \geq 1).$$

Pour $\alpha > 0$ et $x \geq \alpha$, z appartient à $]\,0, \operatorname{arc\,cotan}\alpha\,]$.

Posons $\operatorname{arc\,cotan}\alpha = \pi(1-\delta)/2$. Pour $z \in]\,0, \pi(1-\delta)/2\,]$, $\frac{z}{p\pi - z} \leq \frac{1-\delta}{2p-(1-\delta)}$ et comme $z \in]\,0, \pi/2\,[$, nous avons $\frac{z}{p\pi+z} \leq \frac{1}{2p+1}$. Donc

$$|u_n(x) - 1| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1-\delta}{2p - (1-\delta)}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{n+1}\right].$$

C'est-à-dire

$$|u_n(x) - 1| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{(1-\delta)^{n+1}}{(p - (1-\delta)/2)^{n+1}} + \left(\frac{1}{p + 1/2}\right)^{n+1}\right].$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+1/2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1/2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p-(1-\delta)/2)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+(1+\delta)/2)^{n+1}}$$

$$\leq \left(\frac{2}{1+\delta}\right)^{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+(1+\delta)/2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{2}{1+\delta}\right)^{n+1} + \frac{1}{n}\,\frac{2^n}{(1+\delta)^n}\cdot$$

Donc

$$|u_n(x)-1| \leq \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{(1+\delta)^n}\left(\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{2n}\right)\cdot$$

Enfin $\frac{1}{3}+\frac{1}{2n} \leq 1$ et $\frac{1}{1+\delta}+\frac{1}{2n} \leq 1+\frac{1}{2n} \leq 2$, avec $\delta = (2\arctan\alpha)/\pi$, d'où

$$|u_n(x)-1| \leq \frac{1}{3^n} + 2\left(\frac{1}{1+(2\arctan\alpha)/\pi}\right)^n\cdot \qquad \square$$

Nous obtenons ainsi un équivalent de $H_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

Corollaire. *Pour $x > 0$, $\overline{H}_n(x) \sim \left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{-(n+1)} \Big/ \sqrt{1+x^2}$ et la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers 1 sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ $(\alpha > 0)$.*

Théorème 4. $\lim_{n\to\infty} u_{2n}(0) = 2$. *Plus précisément,* $|u_{2n}(0)-2| \leq \frac{1}{2n}\cdot$

Démonstration. Nous avons vu (démonstration du théorème 3) que pour $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$

$$u_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[\left(\frac{z}{z-p\pi}\right)^{n+1} + \left(\frac{z}{z+p\pi}\right)^{n+1}\right]$$

où $z = \operatorname{arc\,cotan} x$. Donc

$$u_{2n}(0) = 1+\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{2p-1}\right)^{2n+1}\right],$$

soit

$$u_{2n}(0) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{2n+1}$$

$$+ \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\left(\frac{1}{2(p-1)+1}\right)^{2n+1}$$

$$= 2 + 2\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{2n+1}.$$

Donc

$$|u_{2n}(0)-2| \leq 2\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{2n+1}$$

$$\leq 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\cdot \qquad \square$$

Théorème 5. *(i) Pour tout $x \geq 0$, $u_{2n+1}(x) < 1 < u_{2n}(x)$.*

(ii) Pour tout $x \geq 0$, la suite $(u_{2n+1}(x))_{n\geq 1}$ est croissante et pour $n \geq 1$,

$$u_{2n+1}(x) - u_{2n-1}(x) \geq \left(\frac{\pi/2-\arctan x}{\pi/2+\arctan x}\right)^{2n} - \left(\frac{\pi/2-\arctan x}{\pi/2+\arctan x}\right)^{2n+2}.$$

(iii) La suite $(u_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante ; en particulier $(u_{2n}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. (i) Posons $z = \operatorname{arc\,cotan} x$. Pour $x > 0$ et $z \in\,]0,\pi/2[$, nous avons

$$u_n(x) - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[\left(\frac{z}{z-p\pi}\right)^{n+1} + \left(\frac{z}{z+p\pi}\right)^{n+1}\right]\cdot$$

Pour n impair, $n = 2m+1$,

$$u_{2m+1}(x) - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[\left(\frac{z}{p\pi-z}\right)^{2m+2} + \left(\frac{z}{p\pi+z}\right)^{2m+2}\right]\cdot$$

Posons

$$v_p = \left(\frac{z}{p\pi-z}\right)^{2m+2} + \left(\frac{z}{p\pi+z}\right)^{2m+2}.$$

La suite (v_p) est décroissante et $u_{2m+1}(x) - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p v_p$. Donc

$$u_{2m+1}(x) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty}(-v_{2k-1}+v_{2k}) < 0.$$

Pour n pair, $n = 2m$,

$$1 - u_{2m}(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left[\left(\frac{z}{p\pi-z}\right)^{2m+1} - \left(\frac{z}{p\pi+z}\right)^{2m+1}\right]\cdot$$

Posons

$$w_p = \left(\frac{z}{p\pi-z}\right)^{2m+1} - \left(\frac{z}{p\pi+z}\right)^{2m+1}.$$

Soit ϕ définie pour $t \geq 1$ par

$$\phi(t) = \left(\frac{z}{t\pi-z}\right)^{2m+1} - \left(\frac{z}{t\pi+z}\right)^{2m+1}.$$

Alors

$$\phi'(t) = -\pi(2m+1)z^{2m+1} \times\left[\left(\frac{1}{t\pi-z}\right)^{2m+2} - \left(\frac{1}{t\pi+z}\right)^{2m+2}\right] \leq 0.$$

La fonction ϕ est décroissante donc la suite (w_p) aussi et

$$1 - u_{2m}(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \, w_p = \sum_{k=1}^{+\infty} (-w_{2k-1} + w_{2k}) < 0.$$

Pour $x = 0$, $u_{2m+1}(x) = 0 < 1$; $u_0(0) = \pi/2 > 1$ et pour $m \geq 1$, $u_{2m}(0) \geq 2 - 1/2m > 1$.

(ii) Pour $n = 2m + 1$,

$$u_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left[\left(\frac{z}{p\pi - z} \right)^{n+1} + \left(\frac{z}{p\pi + z} \right)^{n+1} \right].$$

Posons pour $t \geq 1$, $\alpha(t) = \frac{z}{t\pi + z}$, $\beta(t) = \frac{z}{t\pi - z}$, et pour $t \geq 0$, $\phi_n(t) = t^{n+1} - t^{n+3}$. Alors

$$u_{n+2}(x) - u_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \, [\phi_n(\alpha(p)) + \phi_n(\beta(p))]$$

$$= \phi_n(\beta(1)) + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \, [\phi_n(\alpha(p)) - \phi_n(\beta(p+1))].$$

Pour $z \in]0, \pi/2]$, c'est-à-dire $x \geq 0$, nous avons $0 \leq \beta(p+1) \leq \alpha(p) \leq 1/3$. D'autre part

$$\phi_n'(t) = (n+3)\, t^n \left(\frac{n+1}{n+3} - t^2 \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{n+1}{n+3}} \geq \frac{1}{3}.$$

Donc ϕ_n est croissante sur $[0, 1/3]$ et $\phi_n(0) = 0 \leq \phi_n(\beta(p+1)) \leq \phi_n(\alpha(p))$. Nous obtenons donc $\phi_n(\alpha(p)) - \phi_n(\beta(p+1)) \geq 0$. De même

$$\phi_n''(t) = (n+2)(n+3)\, t^{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} - t^2 \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}} \geq \frac{1}{3}.$$

Donc ϕ_n' est croissante sur $[0, 1/3]$. D'autre part

$$\left[\phi_n(\alpha(t)) - \phi_n(\beta(t+1)) \right]' = \phi_n'(\alpha(t))\, \alpha'(t) - \phi_n'(\beta(t+1))\, \beta'(t+1).$$

Or $\alpha'(t) = -\frac{\pi z}{(t\pi + z)^2}$ et $\beta'(t+1) = -\frac{\pi z}{(t\pi + \pi - z)^2}$. Pour $z \in]0, \pi/2]$, $\pi - z \geq \pi/2 \geq z$, donc $-\alpha'(t) \geq -\beta'(t+1) \geq 0$. Comme pour $t \geq 1$, $\phi_n'(\alpha(t)) \geq \phi_n'(\beta(t+1)) \geq 0 = \phi_n'(0)$, nous avons

$$\left[\phi_n(\alpha(t)) - \phi_n(\beta(t+1)) \right]' \leq 0.$$

La suite $(\phi_n(\alpha(p)) - \phi_n(\beta(p+1)))_{p \geq 1}$ est donc décroissante. Cela prouve que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \left(\phi_n(\alpha(p)) - \phi_n(\beta(p+1)) \right) \geq 0.$$

Comme $\phi(\beta(1)) \geq 0$, $u_{n+2}(x) - u_n(x) \geq 0$. La suite $(u_{2m+1}(x))_{m \geq 0}$ est donc croissante.

Pour $x \geq 0$, $\arctan x + \operatorname{arccotan} x = \pi/2$, donc $\beta(1) = \frac{\pi/2 - \arctan x}{\pi/2 + \arctan x}$.

L'inégalité $u_{n+2}(x) - u_n(x) \geq \phi_n(\beta(1))$ entraîne pour $m \geq 0$:

$$u_{2m+3}(x) - u_{2m+1}(x) \geq \left(\frac{\pi/2 - \arctan x}{\pi/2 + \arctan x} \right)^{2m+2} - \left(\frac{\pi/2 - \arctan x}{\pi/2 + \arctan x} \right)^{2m+4}.$$

(iii) Nous avons vu (démonstration du théorème 4) que $u_{2n}(0) = 2 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{2n+1}$. Donc $u_{2n+2}(0) - u_{2n}(0) = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \phi_{2n} \left(\frac{1}{2p+1} \right)$. Pour $p \geq 1$, $\frac{1}{2p+1} \in [0, 1/3]$ et ϕ_{2n} est croissante sur $[0, 1/3]$, donc la suite $\left(\phi_{2n} \left(\frac{1}{2p+1} \right) \right)_{p \geq 1}$ est décroissante. Ainsi

$$u_{2n+2}(0) - u_{2n}(0) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_{2n} \left(\frac{1}{2k+1} \right) - \phi_{2n} \left(\frac{1}{2k+2} \right) \right) \geq 0. \qquad \square$$

La figure 1 donne l'allure des courbes représentatives de u_2, u_4 et u_6 au voisinage de 0.

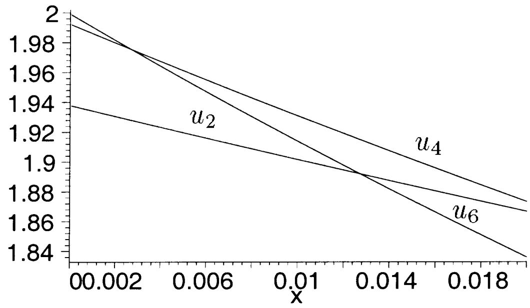


Figure 1.

Nous en déduisons, en explicitant $u_n(x)$, le

Corollaire. *(i) Pour n pair, $n \geq 2$ et $x \geq 0$, $\overline{H}_{n-1}(x) \leq \overline{H}_{n+1}(x) \left(\arctan \frac{1}{x} \right)^2$.*

(ii) Si p est impair et q pair, $\overline{H}_p(x) \leq \overline{H}_q(x) \left(\arctan \frac{1}{x} \right)^{q-p}$.

Ces inégalités apparaissent numériquement très précises, d'autant plus que x est grand.

II Étude des coefficients des polynômes H_n

II.1 Tableau des coefficients

II.1.1 Calcul des coefficients

Écrivons $H_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} X^k$, ($\alpha_{n,k} = 0$ quand n et k sont de parités contraires). La relation (R) donne pour n et k entiers non nuls :

$$\alpha_{n,k} = k\,\alpha_{n-1,k-1} + (k+1)\,\alpha_{n-1,k+1}. \qquad (4)$$

Comme $H_0 = 1$, nous pouvons déterminer successivement les coefficients de H_n par une méthode analogue à celle du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{c|ccccc} & k-1 & & k & & k+1 \\ \hline n-1 & \boxed{\alpha_{n-1,k-1}} & & & & \boxed{\alpha_{n-1,k+1}} \\ & & \times k & & \times(k+1) & \\ n & & & \boxed{\alpha_{n,k}} & & \end{array}$$

II.1.2 Étude à k fixé et nombres d'Euler

Définition. Le n-ième nombre d'Euler E_n, est défini par

$$E_n = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{(n)}(0).$$

La fonction ch est paire, donc $E_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$. Nous avons donc $\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!}\,x^{2k}$. Les propriétés classiques des nombres d'Euler se retrouvent facilement en utilisant les propriétés des polynômes H_n.

Propriétés.

(i) $\cos x = \operatorname{ch}(ix)$, *donc* $H_{2n}(0) = (-1)^n E_{2n}$.

(ii) $H_{2n}(0)$ *est un entier positif, donc* E_{2n} *est du signe de* $(-1)^n$.

(iii) D'après le théorème 4, $u_{2n}(0) \sim 2$, *donc* $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\overline{H}_{2n}(0) \sim 2$, *de sorte que*

$$(-1)^n E_{2n} \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}(2n)!$$

Par ailleurs, les E_{2n} sont reliés aux nombres de Bernoulli $B_k = \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{(k)}(0)$, par l'égalité suivante :

Théorème 6.

$$E_{2n} + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k\,4^k\,B_k = 0.$$

Démonstration. Posons $a_{2n} = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k\,4^k\,B_k$. Nous avons alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{k!\,(2n+1-k)!}\,4^k\,B_k\right)x^{2n+1}.$$

Or $\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}\,4^k\,B_k\,x^m = \sum_{k=0}^{m}\frac{B_k\,4^k}{k!}\,x^k\times\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}$. Nous reconnaissons le produit de Cauchy de deux séries, donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!\,(m-k)!}\,4^k\,B_k\right)x^m = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}\,(4x)^k\right)e^x = \frac{4x}{e^{4x}-1}\,e^x.$$

En utilisant la partie impaire de cette fonction :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{2n}}{(2n)!}\,x^{2n} &= \frac{1}{2x}\left[\frac{4x}{e^{4x}-1}\,e^x + \frac{4x}{e^{-4x}-1}\,e^{-x}\right]\\ &= \frac{2}{e^{4x}-1}\left(e^x - e^{3x}\right)\\ &= -\frac{2\,e^x}{e^{2x}+1} = -\frac{1}{\operatorname{ch} x}.\end{aligned}$$

Donc $a_{2n} = \left(-\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{(2n)}_{\{x=0\}} = -E_{2n}$. □

Les nombres d'Euler sont connus, le tableau des coefficients des H_n s'en déduit, colonne par colonne :

- posons $e_n = |E_n|$. Alors $H_n(0) = e_n$;
- la colonne 0 du tableau est connue : $\alpha_{m,0} = e_m$;
- les colonnes suivantes s'en déduisent par :

$$\alpha_{n-1,k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\alpha_{n,k} - k\,\alpha_{n-1,k-1}\right), \qquad (k \geq 0)$$

en convenant que $\alpha_{n-1,-1} = 0$.
D'où la construction :

n \ k	0	1	2	3	4
0	$e_0 = 1$				
1		1			
2	$e_2 = 1$		2		
3		5		6	
4	$e_4 = 5$		28		24

Théorème 7. *Pour tous* n *et* k *entiers tels que* $n \geq k$, *il existe des entiers* $d_{k,j}$, $1 \leq j \leq \lfloor k/2 \rfloor$ *tels que*

$$\alpha_{n,k} = \frac{1}{k!}\left(e_{n+k} + d_{k,1}\,e_{n+k-2} + \cdots + d_{k,p}\,e_{n+k-2p}\right)$$

où $p = \lfloor k/2 \rfloor$.

Démonstration.

$$\alpha_{n,0} = e_n = \frac{1}{0!}\,e_{n+0}$$
$$\alpha_{n,1} = e_{n+1} = \frac{1}{1!}\,e_{n+1}.$$

Supposons que, pour un entier $k \geq 1$, nous ayons :

$$\forall n \geq k-1, \quad \alpha_{n,k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\left(e_{n+k-1} + d_{k-1,1}\,e_{n+k-3} + \cdots + d_{k-1,p}\,e_{n+k-1-2p}\right) \quad \text{où } p = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$$

et que

$$\forall n \geq k, \quad \alpha_{n,k} = \frac{1}{k!}\big(e_{n+k} + d_{k,1}\, e_{n+k-2} + \cdots + d_{k,q}\, e_{n+k-2q}\big) \quad \text{où } q = \lfloor k/2 \rfloor.$$

Ainsi pour tout $n \geq k+1$,

$$\begin{aligned}\alpha_{n,k+1} &= \frac{1}{k+1}\left(\alpha_{n+1,k} - k\,\alpha_{n,k-1}\right)\\ &= \frac{1}{(k+1)!}\Big(\big[e_{n+1+k} + d_{k,1}\, e_{n+1+k-2} + \cdots + d_{k,q}\, e_{n+1+k-2q}\big]\\ &\qquad - k^2\left[e_{n+k-1} + \cdots + d_{k-1,p}\, e_{n+k-1-2p}\right]\Big).\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, les nombres d'Euler de chaque terme ont pour indice maximal $n+1+(k-2q)$ et $n+1+(k-2(p+1))$, et nous avons

$$q \leq k/2 < (k+1)/2 \quad \text{et} \quad p+1 \leq (k-1)/2 + 1 = (k+1)/2.$$

Tous les coefficients des nombres d'Euler sont produits de $\frac{1}{(k+1)!}$ par un entier. L'écriture est donc bien de la forme voulue. □

En utilisant l'équivalent $e_{2n} \sim 2(2/\pi)^{2n+1}(2n)!$, il en résulte :

Corollaire. *Pour k fixé,* $\alpha_{n,k} \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k+1+n} n!\, \frac{n^k}{k!}$ *lorsque n tend vers l'infini en gardant la parité de k.*

Une autre application intéressante est le

Théorème 8. *Les coefficients du développement de* $\frac{(\tan u)^k}{\cos u}$ *sont les* $\frac{\alpha_{n,k}}{n!}$.

Démonstration. Nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} u^n = \frac{1}{\cos u - t \sin u}$. Cette égalité sera prouvée plus loin (théorème 3 du second article). Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} u^n = \frac{1}{\cos u} \sum_{k=0}^{+\infty} (\tan u)^k\, t^k.$$

En identifiant les coefficients de t^k dans les deux membres, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{n,k}}{n!} u^n = \frac{(\tan u)^k}{\cos u},$$

et les $\alpha_{n,k}$ s'expriment à l'aide des nombres d'Euler grâce au théorème 7. □

II.1.3 Relations entre les coefficients d'une même ligne

(i) D'après (R), $H_{n+1}(i) = i\, H_n(i)$, donc $H_n(i) = i^n$, d'où $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}\, i^k = i^n$. Ainsi

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha_{2m,2k} = (-1)^m \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha_{2m+1,2k+1} = (-1)^m \end{cases}.$$

(ii) Si I_k est la k-ième intégrale de Wallis, *i.e.* $I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x\, \mathrm{d}x$, d'après la relation (R),

$$H_{n+1}(ix) = ix\, H_n(ix) + (1-x^2)\, H_n'(ix).$$

En intégrant par parties $\sqrt{1-x^2}\, H_n'(ix)$, nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{H_{n+1}(ix)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = -i\Big[H_n(ix)\ \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = iH_n(0).$$

En posant $x = \sin u$, $\int_0^{\pi/2} H_{n+1}(i \sin u)\, \mathrm{d}u = i\, e_n$, d'où :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k I_{2k}\, \alpha_{2m,2k} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k I_{2k+1}\, \alpha_{2m+1,2k+1} = e_{2m} \end{cases}.$$

II.2 Étude diagonale des coefficients du tableau

Les coefficients de H_n s'expriment d'une façon remarquable :

Théorème 9. *Il existe une unique suite* (τ_k), *où* τ_k *est un polynôme de degré k tel que pour tout entier n,*

$$\overline{H}_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \tau_k(n)\, X^{n-2k}.$$

La suite τ_k *est définie par :*

$$\begin{cases} \tau_0 = 1, \\ \forall k \geq 1, \quad (X+1)\,\tau_k(X+1) = (X+1-2k)\,\tau_k(X) \\ \qquad\qquad + (X+2-2k)\,\tau_{k-1}(X) \quad \left(\mathrm{E}_k\right) \end{cases}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k.

Pour tout n, $n!\tau_0(n)$ est le coefficient dominant de H_n, donc $\tau_0(n) = 1$ et $\tau_0(X) = 1$.

Supposons maintenant que, pour un $k \geq 1$, τ_{k-1} existe et que ce soit un polynôme de degré $k-1$.

En identifiant les coefficients de X^{n+1-2k} dans (R), nous obtenons pour tout entier n,

$$(n+1)\,\tau_k\,(n+1) = (n+1-2k)\,\tau_k\,(n) + (n+2-2k)\,\tau_{k-1}\,(n)\,.$$

Cela prouve que le polynôme τ_k doit vérifier ($\mathrm{E_k}$). L'application ϕ qui à tout polynôme P associe le polynôme $(X+1)\,P(X+1) - (X+1-2k)\,P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$. De plus P et $\phi(P)$ ont même degré. C'est donc un isomorphisme, et il existe un unique polynôme τ_k tel que $\phi(\tau_k) = (X+1-2k)\,\tau_{k-1}\,(X)$. De plus ce polynôme est de degré k. □

Ainsi, pour les premières valeurs de k :

$$\tau_0\,(X) = 1$$
$$\tau_1\,(X) = \frac{1}{3}X - \frac{1}{6}$$
$$\tau_2\,(X) = \frac{1}{18}X^2 - \frac{1}{5}X + \frac{43}{360}\cdot$$

Théorème 10. $\tau_n^{(n)}\,(X) = \dfrac{1}{3^n}\cdot$

Démonstration. En dérivant n fois ($\mathrm{E_n}$) à l'aide de la formule de Leibniz, nous obtenons :

$$(X+1)\,\tau_n^{(n)}\,(X) + n\,\tau_n^{(n-1)}\,(X+1) = (X+1-2n)\tau_n^{(n)}\,(X) + n\,\tau_n^{(n-1)}\,(X) + n\,\tau_{n-1}^{(n-1)}\,(X)\,.$$

Posons

$$\tau_n^{(n)}\,(X) = \alpha_n,\ \tau_n^{(n-1)}\,(X) = \alpha_n X + \beta_n,\ \tau_{n-1}^{(n-1)}\,(X) = \alpha_{n-1}.$$

Alors $(X+1)\alpha_n + n\alpha_n = (X+1-2n)\alpha_n + n\alpha_{n-1}$, soit $3\alpha_n = \alpha_{n-1}$. $\tau_0 = 1$ donc $\alpha_0 = 1$. D'où $\alpha_n = 1/3^n$. □

Corollaire. *Le coefficient dominant de τ_n est* $\dfrac{1}{3^n n!}\cdot$

Théorème 11. *Pour tout n, $n \geq 1$, le polynôme τ_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]\,0, 2n-1\,[$; la distance entre deux racines consécutives est toujours strictement supérieure à 1, et si $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont les racines de τ_{n-1}, ordonnées en ordre croissant et $b_1, \ldots, b_n$ celles de τ_n, on a :*

$$0 < a_1 < b_1 < a_1 + 1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_{n-1} + 1 < 2n-2 < b_n < 2n-1.$$

Démonstration. Pour les premières valeurs :

$\tau_1\,(X)$ a une unique racine $a_1 = 1/2$, et $0 < a_1 < 1$.

$\tau_2\,(X) = \frac{X^2}{18} - \frac{X}{5} + \frac{43}{360}$. $\tau_2\,(2) = -7/120$, donc τ_2 a deux racines b_1 et b_2, et $0 < b_1 < b_2$. De plus $\tau_2\,(X+1) = \tau_2\,(X) + \frac{1}{90}(10X-13)$, donc $\tau_2\,(b_1+1) = \frac{1}{90}(10b_1-13)$. D'autre part $\tau_2\left(\frac{13}{10}\right) = -\frac{7}{150} < 0$. Donc $\frac{13}{10} \in]b_1, b_2[$, et $10b_1 - 13 < 0$. Par suite $\tau_2\,(b_1+1) < 0$, et $b_1 < b_1 + 1 < b_2$. Ainsi $b_2 - b_1 > 1$. Par ailleurs $\tau_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{30}$, donc $\frac{1}{2} < b_1 < 2 < b_2$. Ainsi $a_1 < b_1 < 2 < b_2$. Enfin $\tau_2\,(3) = \frac{7}{360}$, $\tau_2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{18}$. Donc $0 < a_1 < b_1 < a_1 + 1 < 2 < b_2 < 3$. Remarquons qu'une estimation numérique des racines de τ_2 aurait aussi donné le résultat.

Soit $n \geq 3$. Supposons que τ_{n-1} admette $n-1$ racines réelles $a_1, \ldots, a_{n-1}$ telles que $0 < a_1 < \cdots < 2n-4 < a_{n-1} < 2n-3$ et que pour tout i, $1 \leq i \leq n-2$, $a_{i+1} - a_i > 1$. Il résulte alors de ($\mathrm{E_n}$) que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\quad (a_i+1)\,\tau_n\,(a_i+1) = (a_i+1-2n)\,\tau_n\,(a_i)\,.$$

Or $a_i + 1 > 0$ et $a_i + 1 - 2n < 0$, donc $\tau_n\,(a_i)$ et $\tau_n\,(a_i+1)$ sont de signes contraires au sens large, et si $\tau_n\,(a_i) = 0$, $\tau_n\,(a_i+1) = 0$. Ainsi τ_n admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]\,a_i, a_i+1\,]$, $1 \leq i \leq n-1$, ce qui fournit $n-1$ racines $b_1, \ldots, b_{n-1}$ de τ_n. De plus

$$0 < a_1 < b_1 \leq a_1 + 1 < a_2 < b_2 \leq a_2 + 1 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_{n-1} + 1 < 2n-2.$$

Pour $x = 2n-2$, ($\mathrm{E_n}$) donne : $(2n-2)\tau_n\,(2n-1) = -\tau_n\,(2n-2)$. Comme τ_n est un polynôme de degré n, il admet au plus n racines. Ainsi $\tau_n\,(2n-2)$ et $\tau_n\,(2n-1)$ ne sont pas tous les deux nuls, donc ils sont de signes contraires au sens strict, donc τ_n admet une racine b_n dans $]\,2n-2, 2n-1\,[$. Le polynôme τ_n admet donc exactement n racines réelles $b_1, \ldots, b_n$. Aucun des nombres a_i ne peut être racine de τ_n, donc

$$0 < a_1 < b_1 < a_1 + 1 < a_2 < b_2 < a_2 + 1 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_{n-1} + 1 < 2n-2 < b_n < 2n-1.$$

Pour $n \geq 2$, $\tau_{n-1}\,(x) = \frac{1}{3^{n-1}(n-1)!}(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})$ et $\tau_n\,(x) = \frac{1}{3^n n!}(x-b_1)\ldots(x-b_n)$. D'après ($\mathrm{E_n}$), pour $1 \leq i \leq n-1$, $(b_i+1)\,\tau_n\,(b_i+1) = (b_i+2-2n)\,\tau_{n-1}\,(b_i)$ où $b_i + 1 > 0$ et $b_i + 2 - 2n < 0$. Pour $i = n-1$, $a_{n-1} < b_{n-1}$ donc $\tau_{n-1}\,(b_{n-1}) > 0$ et $\tau_n\,(b_{n-1}+1) < 0$. Ainsi $b_{n-1} + 1 < b_n$ soit $b_n - b_{n-1} > 1$. Pour $1 \leq i \leq n-2$, $b_i \in]\,a_i, a_{i+1}\,[$, donc $\tau_{n-1}\,(b_i)$ est du signe de $(-1)^{n-i-1}$, donc $\tau_n\,(b_i+1)$ est du signe de $(-1)^{n-i}$. Comme $b_i + 1 < a_{i+1} + 1 < b_{i+2}$, $b_i + 1 \in]\,b_i, b_{i+2}\,[$. Donc $b_i + 1 \in]\,b_i, b_i + 1\,[$ et $b_{i+1} - b_i > 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$. □

La disposition des racines apparaît sur la figure 2, où sont représentés τ_6 et τ_7 :

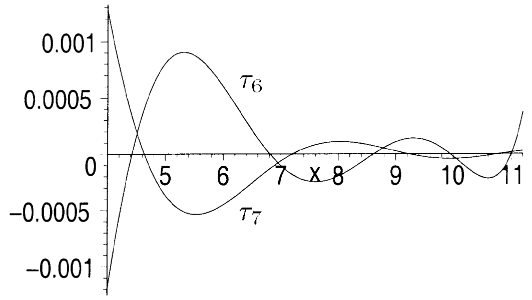


Figure 2.

Théorème 12. *Soit a_n la plus grande racine de τ_n. Alors, pour $n \geq 2$,*

$$2n - 1 - \frac{1}{2n} < a_n < 2n - 1.$$

Démonstration. Pour $n \geq 2$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2n-1$ sont les racines de τ_n. D'après le théorème de Rolle, τ_n' admet $n-1$ racines qui séparent celles de τ_n. Soit x_0 la plus grande : $a_{n-1} < x_0 < a_n$. L'étude à l'infini et la factorisation de τ_n' montrent que τ_n décroît sur $[\,a_{n-1}, x_0\,]$ et croît sur $[\,x_0, +\infty\,[$. De même, si τ_n'' admet des racines, la plus grande est inférieure à x_0 et donc τ_n est convexe sur $[\,x_0, +\infty\,[$. Soit x un élément de $]\,a_{n-1}, a_n\,[$. La droite D_x qui joint le point de coordonnées $(x, \tau_n(x))$ et le point de coordonnées $(2n-1, \tau_n(2n-1))$ coupe l'axe $x'x$ en ξ.

- si $x \geq x_0$, $\xi < a_n$ par raison de convexité ;
- si $x \leq x_0$, comme $\tau_n(x) \geq \tau_n(x_0)$, la pente de D_x est inférieure à celle de D_{x_0}, et, si ξ_0 est le point obtenu pour $x = x_0$, $\xi \leq \xi_0 < a_n$. Donc $\xi < a_n$.

Appliquons ce résultat pour $x = 2n-2$. La droite D_{2n-1} coupe $x'x$ au point ξ défini par

$$\xi = 2n - 2 - \frac{\tau_n(2n-2)}{\tau_n(2n-1) - \tau_n(2n-2)}.$$

Or, d'après ($\mathrm{E_n}$), $(2n-1)\,\tau_n(2n-1) = -\tau_n(2n-2)$. Nous obtenons donc

$$\xi = 2n - 2 + \frac{2n-1}{2n} = 2n - 1 - \frac{1}{2n},$$

ce qui prouve l'encadrement. □

Théorème 13. *Pour p entier strictement positif,*

$$(-1)^n \tau_n(-p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{\ln n}{2}\right)^{p-1}.$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord la relation ($\mathrm{E_n}$) :

$$(x+1)\,\tau_n(x+1) = (x+1-2n)\,\tau_n(x) + (x+2-2n)\,\tau_{n-1}(x).$$

Pour $x = -1$, nous avons $2n\,\tau_n(-1) = -(2n-1)\tau_{n-1}(-1)$. Comme $\tau_0 = 1$, $\tau_n(-1) = (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$. D'après la formule de Stirling, $\tau_n(-1) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Pour $x = -p$, $p \geq 2$,

$$(-p+1)\,\tau_n(-p+1) = (-p+1-2n)\,\tau_n(-p) + (-p+2-2n)\,\tau_{n-1}(-p).$$

Posons $\alpha_n = (-1)^n \sqrt{n}\,\tau_n(-p)$.

La relation précédente donne alors pour $n \geq 2$:

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = \frac{p-2+2n}{p-1+2n} \times \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{n-1}} + (-1)^n \frac{p-1}{p-1+2n}\,\tau_n(-p+1).$$

Or $\tau_n(x) = \frac{1}{3^n n!}(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ où $0 < b_1 < \cdots < b_n$, donc $\tau_n(-p)$ est du signe de $(-1)^n$ et $\alpha_n > 0$. Nous avons donc établi l'inégalité

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{n-1}} + (-1)^n \frac{p-1}{p-1+2n}\,\tau_n(-p+1).$$

Raisonnons maintenant par récurrence sur p, en supposant que

$$(-1)^n \tau_n(-(p-1)) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{\ln n}{2}\right)^{p-2}.$$

À ce moment

$$(-1)^n \frac{p-1}{p-1+2n}\,\tau_n(-p+1) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{p-1}{2^{p-1}} \times \frac{(\ln n)^{p-2}}{n\sqrt{n}}.$$

La série de terme général $\frac{(\ln n)^{p-2}}{n\sqrt{n}}$ converge, elle est à termes positifs, donc

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha_1 + (p-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p-1+2k}\,\tau_k(-p+1).$$

Et donc $\alpha_n = O(\sqrt{n})$.

Or

$$\alpha_n = \frac{p-2+2n}{p-1+2n} \times \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times \alpha_{n-1} + (-1)^n \frac{(p-1)\sqrt{n}}{p-1+2n} \times \tau_n(-p+1).$$

En effectuant un développement limité des expressions qui interviennent :

$$\begin{aligned}\frac{p-2+2n}{p-1+2n} &= 1-\frac{1}{2n}\,\frac{1}{1+\frac{p-1}{2n}}\\ &= 1-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{p-1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= 1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{p-2+2n}{p-1+2n}\times\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et

$$\frac{p-2+2n}{p-1+2n}\times\sqrt{\frac{n}{n-1}}\times\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Cela entraîne que $\alpha_n-\alpha_{n-1} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+(-1)^n\frac{(p-1)\sqrt{n}}{p-1+2n}\times\tau_n(-p+1)$. Le deuxième terme est équivalent d'après l'hypothèse de récurrence à $\frac{(p-1)(\ln n)^{p-2}}{\sqrt{\pi}\,2^{p-1}\,n}$, et $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est négligeable devant $\frac{(\ln n)^{p-2}}{n}$. Donc

$$\alpha_n-\alpha_{n-1}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\frac{p-1}{2^{p-1}}\times\frac{(\ln n)^{p-2}}{n}.$$

Or $\frac{(\ln n)^{p-2}}{n}$ est le terme général positif d'une série divergente, donc

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\frac{p-1}{2^{p-1}}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^{p-2}}{k}.$$

Comme $\alpha_0 = 0$, nous avons $\alpha_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\frac{p-1}{2^{p-1}}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^{p-2}}{k}$. Or $\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^{p-2}}{k} \sim \int_1^n\frac{(\ln t)^{p-2}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^n\frac{(\ln t)^{p-2}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln n)^{p-1}}{p-1}$. Finalement :

$$\alpha_n\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\left(\frac{\ln n}{2}\right)^{p-1}.$$

Soit

$$\tau_n(-p)\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}\left(\frac{\ln n}{2}\right)^{p-1}. \qquad \square$$

* *

QUADRATURE
Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

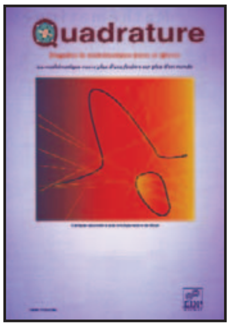
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**