**Titre:** **De la Géométrie de l'Information à la physique statistique des systèmes dynamiques**

**Orateur :** **Frédéric Barbaresco, Responsable Key Technology Domain PCC (Processing, Control & Cognition), THALES Land & Air systems**

**Résumé:**

La Géométrie de l'Information trouve ses origines dans les travaux de Maurice Fréchet et Calyampudi Radhakrishna Rao sur la borne inférieure de tout estimateur statistique donnée par l'inverse de la matrice de Fisher. Fréchet s'intéressait aux "densités distingués", densités pour lesquelles l'estimateur atteint la borne et découvrit la structure fondamentale de la Géométrie de l'Information donnée par une équation dite de Clairaut(-Legendre) associée aux famille exponentielles et ensuite C.R. Rao introduisit une structure Riemannienne dans l'espace des paramètres des densités de probabilités, en montrant que la métrique donnée par la matrice de Fisher était invariante par reparamétrisation. N.N. Chentsov axiomatisa la Géométrie de l'Information et montra que la métrique de Fisher est unique. Hirohiko Shima observa que cette métrique de Fisher (égale au hessien de l'opposée du logarithme de la fonction de partition) est un cas particulier de métrique hessienne dont les structures ont été étudiées par le mathématicien Jean-Louis Koszul, et sont liées aux notions de fonction caractéristique de Koszul-Vinberg sur les cônes saillants et de formes dites de Koszul. Parallèlement à ces travaux, le physicien Jean-Marie Souriau introduisit en 1969 la Géométrie Symplectique dans la discipline dite Mécanique Géométrique en reformulant des travaux de Lagrange. Il introduisit la notion "d'application moment", qui est liée à la géométrisation du théorème de Noether en calcul des variations. Dans le chapitre IV de son ouvrage, il étendit la Mécanique Statistique dans ce nouveau formalisme en généralisant la notion d'état de Gibbs aux actions hamiltoniennes d'un groupe de Lie sur une variété symplectique homogène et observa que le densité de Gibbs en Thermodynamique classique n'était pas covariante par rapport aux groupes dynamiques de la Physique (groupe de Galilée et groupe de Poincaré). L'état de Gibbs classique apparaît comme un cas particulier dans lequel le groupe de Lie de dimension 1 est le groupe des translations temporelles. Souriau étend la notion d'ensemble canonique de Gibbs à une variété symplectique homogène sur laquelle un groupe agit (groupes dynamiques de la physique ; sous-groupes du groupe affine). L'algèbre de Lie du groupe vérifie des relations de type cohomologique qui brisent la symétrie, avec l'apparition d'un cocycle. Pour rétablir cette symétrie, Souriau introduit une température « géométrique » comme élément de l'algèbre de Lie, et une chaleur « géométrique » (moyenne de l'Energie qui est le moment de l'action hamiltonnienne du groupe) comme élément de son dual, permettant de remettre en dualité, via la transformée de Legendre, l' Entropie « géométrique » et le logarithme de la fonction de partition (fonction caractéristique) définie pour ces nouvelles variables. Nous illustrerons ce modèle avec l'exemple le plus simple de système dynamique, celui de la centrifugeuse. Souriau appela ce modèle "Thermodynamique des groupes de Lie". Nous avons découvert que ce modèle de Souriau permettait de généraliser la Géométrie de l'Information pour des variétés homogènes et d'introduire une métrique universelle de Fisher-Souriau (la métrique de Fisher reste égale au hessien de l'opposée du logarithme de la fonction de partition sur la variété), invariante sous l'action du groupe. Comme le remarqua Souriau « ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement le groupe G, son cocycle symplectique et le couple de la température et de la chaleur (géométriques)». Nous conclurons cet exposé par un rappel de la notion de fonction caractéristique introduite par François Massieu en Thermodynamique, par Henri Poincaré en Probabilité et par

Roger Balian en Physique Quantique, et une nouvelle définition de l'Entropie due à Souriau et son extension multisymplectique liées aux densités de Gibbs d'ordre supérieur . Nous illustrons ces modèles pour les familles exponentielles, et dans le cas particulier des densités gaussiennes multivariées. L'application moment de Souriau permet de calculer les équations d'Euler-Poincaré des géodésiques, qui permettent de définir par "tirs géodésiques" le calcul de la distance au sens de la Géométrie de l'Information. Nous terminons sur un rappel des travaux de Muriel Casalis (IMT) qui étudia dans sa thèse avec G. Letac, les familles de densités de probabilités de type Exponentielle sur Rd Invariantes par le groupe affine. Le Professeur Jean-Louis Koszul nous a quitté le 12 Janvier 2018 à l'âge de 97 ans. Cet exposé lui sera dédié.

**Bibliographie:**


[1] Massieu F., Sur les Fonctions caractéristiques des divers fluides. C. R. Acad. Sci. , n°69, pp. 858–862, 1869

[2] Fréchet M., Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons, Revue de l'Institut International de Statistique, vol. 11, n° 3/4, pp. 182–205, 1943

[3] Rao C.R., Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, Bull. Calcutta Math. Soc., n°37, pp. 81–89, 1945

[4] Chentsov N.N., Statistical Decision Rules and Optimal Inferences, Transactions of Mathematics Monograph, American Mathematical Society: Providence, RI, USA, Volume 53, 1982

[5] Crouzeix J.P., A relationship between the second derivatives of a convex function and of its conjugate, Math. Progr., n°3, pp. 364–365 , 1977

[6] Moreau J.J., Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien, C. R. Acad. Sci., n°255, pp. 2897–2899, 1962

[7] Koszul J.L. , Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Can. J. Math., n°7, 562–576, 1955

[8] Koszul J.L., Domaines bornées homogènes et orbites de groupes de transformations affines, Bull. Soc. Math. France 89, pp. 515-533., 1961

[9] Koszul J.L. , Ouverts convexes homogènes des espaces affines. Math. Z., n°79, 254–259, 1962

[10] Koszul J.L. , Variétés localement plates et convexité. Osaka. J. Math., n°2, 285–290, 1965

[11] Koszul J.L., Déformations des variétés localement plates, .Ann Inst Fourier, n°18 , 103-114., 1968

[12] Koszul J.L. , Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires. In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, pp. 105–110, 1970

[13] Vey J., Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Science, 3e série, tome 24,n°4, p.641-665, 1970

[14] Alekseevsky D., Vinberg's theory of homogeneous convex cones: developments and applications, Transformation groups 2017 (https://www.mccme.ru/tg2017/slides/alexeevsky.pdf)

[15] Shima H., The Geometry of Hessian Structures, World Scientific, 2007

[16] Balian R., From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics; Springer: Heidelberg, Germany, Volumes I and II, 1991 & 1992

[17] Balian R., Valentin P., Hamiltonian structure of thermodynamics with gauge. Eur. Phys. J. B, n°21, pp. 269–282, 2001

[18] Balian R., The entropy-based quantum metric. Entropy, n°16, pp. 3878–3888, 2014

[19] Balian R., François Massieu et les Potentiels Thermodynamiques, Évolution des Disciplines et Histoire des Découvertes; Académie des Sciences: Avril, France, 2015

[20] Souriau, J.M. Structure des systèmes dynamiques; Editions Jacques Gabay: Paris, France, 1970.

[21] Souriau, J.-M., Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie, Colloques internationaux du CNRS numéro 237, Géométrie symplectique et physique mathématique, 1974, pp. 59–113.
[22] Gromov M., Gromov Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. October 2014, Jussieu, November 6th , 2014 (http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf)
[23] Gamboa F., Gassiat E., Maximum d'entropie et problème des moments: Cas multidimensionnel. Probab. Math. Stat., n°12, pp. 67–83, 1991
[24] Letac G., Lectures on Natural Exponential Families and Their Variance Functions, Volume 50 of Monografias de Matematica (Mathematical Monographs); Instituto de Matematica Pura e Aplicada (IMPA): Rio de Janeiro, Brazil, 1992.
[25] Casalis M., Familles exponentielles naturelles invariantes par un groupe de translations. C. R. Acad. Sci. Ser. I Math., n°307, pp. 621–623, 1988
[26] Casalis M., Familles Exponentielles Naturelles Invariantes par un Groupe. Ph.D. Thesis, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1990
[27] Marle C.M., From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics. Entropy, 18, 370, 2016
[28] de Saxcé G. Link between Lie Group Statistical Mechanics and Thermodynamics of Continua. Entropy, 18, 254, 2016
[29] Barbaresco F., Koszul information geometry and Souriau Lie group thermodynamics, AIP Conf. Proc. n°1641, n° 74, 2015, Proceedings of MaxEnt'14 conference, Amboise, Septembre 2014
[30] Barbaresco F., Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics, Entropy, vol. 16, 2014, pp. 4521-4565. Published in the book Information, Entropy and Their Geometric Structures, MDPI Publisher, September 2015
[31] Barbaresco F., Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré Equation of Souriau Lie Group Thermodynamics. In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer, pp. 529–540, 2015
[32] Barbaresco F., Geometric Theory of Heat from Souriau Lie Groups Thermodynamics and Koszul Hessian Geometry: Applications in Information Geometry for Exponential Families. Entropy, n°18, pp. 386, 2016
[33] Barbaresco F., Poly-symplectic Model of Higher Order Souriau Lie Groups Thermodynamics for Small Data Analytics, GSI 2017, SPRINGER LNCS 10589, pp. 432–441, 2017
[34] Barbaresco F., Les densités de probabilité « distinguées » et l'équation d'Alexis Clairaut: regards croisés de Maurice Fréchet et de Jean-Louis Koszul, GRETSI'17, Juan-Les-Pins, Sept. 2017
[35] Barbaresco F., Jean-Louis Koszul ou les structures élémentaires de la Géométrie de l'Information, soumission à Matapli