

Complétude et non-complétude en dimension finie

par Angèle BICHOT

I Introduction

On sait que tout \mathbb{R} ou \mathbb{C} -espace vectoriel normé (evn) de dimension finie est complet. En revanche, cette propriété tombe en défaut en dimension infinie (on peut montrer, plus généralement, qu'un \mathbb{R} ou \mathbb{C} -evn à base dénombrable n'est jamais complet, c'est une conséquence du théorème de Baire). Aimant élargir et interroger les réciproques des théorèmes du programme, je me suis demandé si, d'une part, la propriété reste vraie pour un K -evn de dimension finie, avec K un corps valué complet quelconque, et d'autre part, si sa réciproque est vraie, autrement dit : *si E est un K -evn de dimension finie et complet, K est-il forcément complet ?* Le premier point trouve une réponse affirmative. En effet, la preuve pour \mathbb{R} ou \mathbb{C} nécessite uniquement l'équivalence des normes, qui reste vraie sur un corps complet quelconque (ce point ne sera pas approfondi ici, mais on pourra trouver une démonstration de l'équivalence des normes sur corps complet quelconque dans [3]). En revanche, sa réciproque est fautive, et c'est la construction d'un contre-exemple qui fera l'objet de ce rapport.

L'idée de cette construction est d'étendre à \mathbb{C} l'automorphisme de corps suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Le contre-exemple est alors le corps K des points fixes d'un certain automorphisme, obtenu à partir de l'extension de ϕ et de la conjugaison de \mathbb{C} . Il n'est pas difficile de vérifier que \mathbb{C} est bien un K -espace vectoriel de dimension finie et complet (section 4.1), mais que K n'est pas complet (section 4.2). La difficulté consiste à montrer qu'il est possible d'étendre l'automorphisme de corps à l'extension non algébrique $\mathbb{C}/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Dans ce but, nous devons invoquer le lemme de Zorn (section 2.1) et mobiliser la théorie des extensions de corps (sections 2.2 et 2.3) pour démontrer un théorème de prolongement (théorème 14, section 3).

II Quelques notions utiles en théorie des extensions de corps

II.1 Lemme de Zorn

Définition 1. Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné.

- On dit que $z \in E$ est maximal si pour tout $x \in E$, $z \leq x$ alors $x = z$.
- On dit que $z \in E$ est un maximum si pour tout $x \in E$, $x \leq z$.

Autrement dit, un élément maximal est plus grand que tous les éléments auxquels il peut être comparé, tandis qu'un maximum est comparable et supérieur à tous les éléments. Notons qu'un maximum est toujours un élément maximal. Notons de plus que si l'ordre \leq est total, ces deux définitions coïncident.

Définition 2 (ensemble inductif). Soit E un ensemble partiellement ordonné, on dit que E est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de E admet un majorant.

Le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [4] (qui utilise l'axiome du choix), sera un outil fondamental dans la construction de notre contre-exemple.

Lemme 3 (de Zorn). Tout ensemble inductif non vide possède un élément maximal.

II.2 Extensions de corps

Définition 4 (extension de corps). Soit K un corps, une extension de K est un corps L contenant K comme sous-corps. On note cette extension L/K .

On vérifie que L , muni de son produit et de la loi externe

$$\begin{aligned} K \times L &\rightarrow L \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

est une K -algèbre.

On appelle degré de L/K la dimension de L vu comme K -espace vectoriel. On le note $[L : K]$.

Définition 5 (sous-extension engendrée par une partie). Soient L/K une extension, et S une partie de L . On note $K(S)$ l'intersection de tous les sous-corps de L contenant K et S , c'est donc la plus petite sous-extension de L/K contenant S . On l'appelle sous-extension engendrée par S .

On a $K(S) = \{P(s_1, \dots, s_p)Q(s'_1, \dots, s'_q)^{-1}, (p, q) \in \mathbb{N}^2, (s_1, \dots, s_p, s'_1, \dots, s'_q) \in S^{p+q}, (P, Q) \in K[X_1, \dots, X_p] \times K[X_1, \dots, X_q], Q(s'_1, \dots, s'_q) \neq 0\}$

Autrement dit, $K(S)$ est l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans K d'éléments de S . Pour un singleton $\{s\}$, on notera $K(\{s\})$ sous la forme $K(s)$.

Définition 6 (élément algébrique, transcendant). Soit L/K une extension. On dit que $\alpha \in L$ est algébrique sur K s'il est annulé par un polynôme non nul à coefficients dans K . Le cas échéant, l'ensemble des polynômes annulateurs de α est un idéal non nul de $K[X]$, il est donc engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal, noté μ_α , et appelé polynôme minimal de α (sur K). On a alors $K(\alpha) = K[\alpha]$, et $K[\alpha]$ est donc un corps.

Si α n'est pas algébrique sur K , on dit que α est transcendant.

Définition 7 (extension algébrique, transcendance). Soit L/K une extension, on dit que L/K est algébrique si tous les éléments de L sont algébriques sur K .

On dit que L/K est transcendance sinon.

II.3 Bases de transcendance

Définition 8. Soit L/K une extension de corps, un sous-ensemble fini $\{s_1, \dots, s_n\} \subset L$ est dit algébriquement lié sur K s'il existe un polynôme non nul $P(X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(s_1, \dots, s_n) = 0$. Dans le cas contraire, on le dit algébriquement libre. Un sous-ensemble quelconque $S \subset L$ est dit algébriquement lié sur K s'il existe une partie finie de S qui soit algébriquement liée sur K . Dans le cas contraire, on le dit algébriquement libre.

Par convention, \emptyset est algébriquement libre.

Définition 9 (base de transcendance). Soient L/K une extension de corps, un sous-ensemble $S \subset L$ est appelé une base de transcendance sur K si S est algébriquement libre sur K et n'est pas strictement contenu dans un autre sous-ensemble de L algébriquement libre sur K .

Le théorème suivant et sa preuve sont adaptés de [2].

Théorème 10. Toute extension de corps L/K possède une base de transcendance.

Démonstration. Considérons \mathcal{S} , l'ensemble des parties de L algébriquement libres sur K , partiellement ordonné par l'inclusion. \mathcal{S} est non vide, car contient \emptyset .

Montrons que \mathcal{S} est inductif. Soit $\{S_i, i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de \mathcal{S} . $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ est un sous-ensemble de L , et est algébriquement libre sur K . En effet, s'il ne l'était pas, il existerait une famille finie de S algébriquement liée, et contenue dans un certain S_i , ce qui contredirait la liberté de S_i . S est donc un majorant de $\{S_i, i \in I\}$ et \mathcal{S} est inductif.

D'après le lemme de Zorn, il existe un sous-ensemble de L qui est algébriquement libre sur K et qui n'est pas strictement inclus dans un autre sous-ensemble algébriquement libre. C'est la définition d'une base de transcendance. \square

III Le théorème de prolongement d'un automorphisme

Le premier théorème de cette section est directement issu de [1]. Le théorème suivant et sa preuve sont inspirés de [2].

Notation : soient $\tau : K \rightarrow M$ un morphisme de corps et $P \in K[X]$, on note $\tau(P)$ le polynôme de $M[X]$ dont les coefficients sont les images par τ des coefficients de P .

Théorème 11 (de prolongement des morphismes de corps). Soient L/K une extension et $\alpha \in L$ un élément algébrique sur K de polynôme minimal μ_α . Soient M un corps quelconque, et $\tau : K \rightarrow M$ un morphisme de corps. Alors si $\tau(\mu_\alpha)$ possède une racine $\beta \in M$, il existe un morphisme de corps $\sigma : K(\alpha) \rightarrow M$ qui prolonge τ .

Démonstration. Puisque $\beta \in M$ est une racine de $\tau(\mu_\alpha)$, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \rightarrow & M \\ P & \mapsto & \tau(P)(\beta) \end{array}$$

s'annule sur l'idéal (μ_α) , donc se factorise en un morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \varphi : K[X]/(\mu_\alpha) & \rightarrow & M \\ \bar{P} & \mapsto & \tau(P)(\beta) \end{array}$$

D'autre part, l'application

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \rightarrow & L \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

se factorise en un isomorphisme de K -algèbres

$$\begin{array}{ccc} \psi : K[X]/(\mu_\alpha) & \rightarrow & K(\alpha) \\ \bar{P} & \mapsto & P(\alpha) \end{array}$$

Posons $\sigma = \varphi \circ \psi^{-1}$ et vérifions qu'il prolonge τ .

Soit $x \in K$, $\sigma(x) = \varphi \circ \psi^{-1}(x) = \varphi(x.\bar{1}) = \tau(x).1(\beta) = \tau(x)$. σ vérifie les propriétés voulues. \square

Ce théorème nous dit, par exemple, que l'injection canonique $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en un morphisme de corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$. Selon que la racine β de $X^2 - 2$ est $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$, les deux prolongements fournis par ce théorème sont respectivement l'injection canonique $a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{2}$, et le morphisme $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$.

Théorème 12. Soient L/K une extension algébrique, C un corps algébriquement clos et $\phi : K \rightarrow C$ un morphisme de corps, alors ϕ se prolonge en un morphisme de corps de $L \rightarrow C$.

Démonstration. Soit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{(F, \tau), K \subset F \subset L, \tau : F \rightarrow C, \tau|_K = \phi\}$$

muni de la relation d'ordre

$$(F, \tau) \preceq (F', \tau') \Leftrightarrow F \subset F' \text{ et } \tau'|_F = \tau.$$

Montrons que \mathcal{F} est inductif. Soit $\{(F_i, \tau_i), i \in I\}$ une partie de \mathcal{F} totalement ordonnée. Posons $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ et soit $\tau : F \rightarrow C$ l'application définie par $\tau(x) = \tau_i(x)$ dès que $x \in F_i$ (ne dépend pas de l'indice i choisi). F est bien un sous-corps de L contenant K , et τ est un morphisme d'anneaux prolongeant ϕ , ainsi $(F, \tau) \in \mathcal{F}$, et pour tout $i \in I$, $(F_i, \tau_i) \preceq (F, \tau)$. Autrement dit, (F, τ) est un majorant de $\{(F_i, \tau_i), i \in I\}$ et \mathcal{F} est inductif.

Comme il est non vide (contient (K, ϕ)), d'après le lemme de Zorn il possède un élément maximal (F_0, τ_0) . Il reste à montrer que $F_0 = L$.

Si ce n'était pas le cas, $F_0 \subsetneq L$. Soit donc $\alpha \in L \setminus F_0$, α est algébrique sur K donc sur F_0 . Soit μ_α son polynôme minimal sur F_0 .

Un morphisme de corps est automatiquement injectif, en effet s'il existe $x \neq 0$ tel que $\phi(x) = 0$, alors $1 = \phi(1) = \phi(x.x^{-1}) = \phi(x).\phi(x^{-1}) = 0$, ce qui est exclu.

$\tau_0(\mu_\alpha)$ est un polynôme non constant (puisque τ_0 , morphisme de corps, est injectif). Comme C est algébriquement clos, $\tau_0(\mu_\alpha)$ possède une racine dans C .

D'après le théorème de prolongement des morphisme d'anneaux, τ_0 se prolonge en un morphisme d'anneaux $\sigma : F_0(\alpha) \rightarrow C$, et $(F_0, \tau_0) \prec (F_0(\alpha), \sigma)$, ce qui contredit la maximalité de (F_0, τ_0) . \square

Théorème 13. Soient C/K une extension algébrique, où C est un corps algébriquement clos, et ϕ un automorphisme de K , alors ϕ se prolonge en un automorphisme de C .

Démonstration. D'après le théorème précédent en prenant $L = C$, un prolongement ϕ existe et est injectif.

Il suffit donc de montrer que $\phi(C) = C$. Comme $K \subset C$, $K = \phi(K) \subset \phi(C)$. On a donc $K \subset \phi(C) \subset C$.

De plus, $\phi(C)$ est algébriquement clos, car tout polynôme P non constant à coefficients dans $\phi(C)$ est l'image par ϕ d'un polynôme Q non constant à coefficients dans C , qui possède donc une racine $z \in C$, alors $\phi(z) \in \phi(C)$ est racine de P .

Enfin, C/K étant algébrique, tout élément de C est racine d'un polynôme à coefficients dans K , donc dans $\phi(C)$ ($K \subset \phi(C)$), donc est un élément de $\phi(C)$, car ce dernier est algébriquement clos. D'où $\phi(C) = C$. \square

Cela montre par exemple que tout automorphisme de \mathbb{R} se prolonge en un automorphisme de $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ (en fait, on peut montrer que le seul automorphisme de \mathbb{R} est l'identité, qui se prolonge à l'identité et à la conjugaison dans \mathbb{C} . Pas besoin ici de théorèmes puissants).

En revanche, comme $\mathbb{C}/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ n'est pas algébrique, on ne peut rien conclure *a priori* sur le prolongement à \mathbb{C} des automorphismes de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Le théorème suivant permet de lever cette indétermination.

Théorème 14. Soient C/K une extension quelconque, où C est un corps algébriquement clos, et ϕ un automorphisme de K , alors ϕ se prolonge en un automorphisme de C . (Autrement dit, le théorème précédent reste vrai sans l'hypothèse « C/K est une extension algébrique »).

Démonstration. Soit S une base de transcendance de C sur K .

On étend ϕ à $K[S]$ par

$$\begin{aligned} \phi : K[S] &\rightarrow K[S] \\ P(s_1, \dots, s_p) &\mapsto \phi(P)(s_1, \dots, s_p). \end{aligned}$$

Puis, on l'étend à $K(S)$ par

$$\begin{aligned} \phi : K(S) &\rightarrow K(S) \\ P(s_1, \dots, s_p) &\mapsto \phi(P)(s_1, \dots, s_p) \\ \times Q(s'_1, \dots, s'_q)^{-1} &\mapsto \times \phi(Q)(s'_1, \dots, s'_q)^{-1} \end{aligned}$$

S étant algébriquement libre, ces deux prolongements sont bien définis, et ce sont bien des automorphismes.

Montrons à présent que $C/K(S)$ est algébrique. En effet, s'il ne l'était pas, soit $\alpha \in C$ un élément transcendant sur $K(S)$. Alors $S \cup \{\alpha\}$ est algébriquement libre sur K (car tout polynôme P en $(s_1, \dots, s_p, \alpha)$ à coefficients dans K peut être vu comme un polynôme Q en α à coefficients dans $K(S)$; si $P(s_1, \dots, s_p, \alpha) = 0$ alors $Q(\alpha) = 0$, par transcendance $Q = 0$, donc les coefficients de Q sont nuls, or ce sont des polynômes en

(s_1, \dots, s_p) , donc par liberté de S ces polynômes sont nuls, donc $P = 0$). Ceci contredit la maximalité de S .

Comme $C/K(S)$ est algébrique, le théorème précédent assure l'existence d'un automorphisme de C qui prolonge ϕ . \square

IV Retour au problème posé dans l'introduction

Nous pouvons enfin construire notre contre-exemple : il s'agit de former un sous-corps K de \mathbb{C} , sur lequel \mathbb{C} soit de dimension finie, et qui ne contienne pas \mathbb{R} , afin de s'assurer que K n'est pas complet.

IV.1 Construction du corps K

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps, dont tout élément s'écrit de manière unique $a + b\sqrt{2}$ avec a, b rationnels.

Soit l'automorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a - b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Par le théorème 14, ϕ se prolonge en un automorphisme de \mathbb{C} , que l'on notera toujours ϕ par commodité.

Notons κ l'automorphisme de conjugaison complexe. Soit $\psi = \phi^{-1}\kappa\phi$, c'est un automorphisme de \mathbb{C} d'ordre 2. En effet, $\psi^2 = \phi^{-1}\kappa\phi\phi^{-1}\kappa\phi = id$, et si on avait $\psi = id$, on aurait $\kappa\phi = \phi$, donc ϕ serait à valeurs réelles, ce qui contredirait sa surjectivité sur \mathbb{C} .

On considère K l'ensemble des points fixes de ψ .

Lemme 15. K vérifie les propriétés suivantes :

1. K est un sous-corps de \mathbb{C} ;
2. \mathbb{C} est de degré fini sur K ;
3. K ne contient pas \mathbb{R} .

Démonstration.

1. découle directement de la propriété de morphisme de corps de ψ .

2. Tout d'abord, $K = \phi^{-1}(\mathbb{R})$. En effet :

$$\begin{aligned} x \in K & \\ \text{ssi } \phi^{-1}\kappa\phi(x) = x & \\ \text{ssi } \kappa\phi(x) = \phi(x) & \\ \text{ssi } \phi(x) \in \mathbb{R} & \\ \text{ssi } x \in \phi^{-1}(\mathbb{R}). & \end{aligned}$$

On a de plus $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Comme ϕ est un automorphisme, $\mathbb{C} = \phi^{-1}(\mathbb{C})$, d'où $\mathbb{C} = \phi^{-1}(\mathbb{C}) = \phi^{-1}(\mathbb{R}) + \phi^{-1}(i)\phi^{-1}(\mathbb{R}) = K + \phi^{-1}(i)K$. Enfin, comme $\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1$, on a $\phi(i) = \pm i$, d'où $K + \phi^{-1}(i)K = K + iK$. De $\mathbb{C} = K + iK$, on déduit que $[\mathbb{C} : K] = 2$; en particulier, \mathbb{C} est de degré fini sur K .

3. Supposons par l'absurde que $\mathbb{R} \subset K$. Alors tout \mathbb{R} est fixe par ψ , i.e. $\psi = id$ sur \mathbb{R} , donc, suivant que $\psi(i) = i$ ou $-i$ (seules possibilités, car $\psi(i)^2 = \psi(-1) = -1$), $\psi = \pm id$ sur $i\mathbb{R}$, donc $\psi = id$ ou κ (conjugaison complexe); or $\psi \neq id$, donc $\psi = \kappa$, i.e. $\phi\kappa = \kappa\phi$, donc \mathbb{R} est stable par ϕ , donc $\phi(\sqrt[4]{2})$ est réel et ainsi $\phi(\sqrt{2}) = \phi(\sqrt[4]{2})^2 \geq 0$ ce qui n'est pas possible. \square

IV.2 Le contre-exemple

K , le corps construit dans le paragraphe précédent, est un sous-corps de \mathbb{C} où $[\mathbb{C} : K]$ est fini et K ne contient pas \mathbb{R} . Munissons K du module de \mathbb{C} . Fixons $\alpha \in \mathbb{R} \setminus K$. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers α , qui est donc de Cauchy par propriété de suite convergente. Comme K contient 1 et est stable par somme, produit, passage à l'opposé et à l'inverse, on montre aisément que $\mathbb{Q} \subset K$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans K , mais elle ne converge pas dans K . K n'est donc pas complet.

Pourtant, \mathbb{C} , muni de son module, est complet et c'est bien un K -evn de dimension finie.

V Conclusion

En définitive, on a bien construit un K -espace vectoriel de dimension finie complet mais dont le corps de base K n'est pas complet. Cependant, notre construction n'a permis ni d'explicitier K ni d'explicitier le prolongement de ϕ . Tout ce que l'on sait sur K et ϕ , c'est que ce sont respectivement un sous-corps de \mathbb{C} de degré 2 mais distinct de \mathbb{R} , et un automorphisme de \mathbb{C} distinct de l'identité et de la conjugaison complexe. C'est le propre des démonstrations à base du lemme de Zorn : elles prouvent l'existence des objets mais ne peuvent les expliciter. C'est ce qui fait du lemme de Zorn un outil à la fois puissant et frustrant.

Références

- [1] Berhuy, Grégory. *Algèbre : le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018. Chapitre 23.
- [2] Conrad, Keith. *Zorn's lemma and some applications, II*. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/zorn2.pdf>
- [3] Blomme, Thomas, et al. *Les clefs pour l'oral MP Mathématiques, ENS-X 2016 et 2017*. Calvage & Mounet, 2018. Section 14, p. 352.
- [4] Rozière, Paul. *Démonstration du lemme de Zorn*. Cours de L3, Université Paris 7, 2017. <https://www.irif.fr/~roziere/logiqueL3MIS2/zorn.pdf>