

Application des pavages réguliers au problème du nombre chromatique du plan hyperbolique

Loryne BARROCHE Lilian PORRE

Étudiants en licence 2 Mathématiques Physique Chimie Informatique (MPCI) au sein d'Aix-Marseille Université

Résumé

Dans ce document, nous améliorons les bornes du problème du nombre chromatique du plan hyperbolique. Nous cherchons à reproduire le principe de la carte de Heawood prouvant que $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ en coloriant un pavage heptagonal hyperbolique de valence 3. Nous prouvons que pour certaines distances d , $\chi(\mathbb{H}^2, d) \leq 8$.

Le problème du nombre chromatique du plan euclidien

Le problème du nombre chromatique du plan euclidien (ou de Hadwiger-Nelson) consiste à identifier le nombre minimal de couleurs, noté $\chi(\mathbb{R}^2)$, permettant de créer un coloriage (c'est-à-dire une partition) du plan euclidien de sorte à ce que deux points à distance 1 soient toujours de couleurs différentes.

L'origine exacte de ce problème est inconnue mais sa première mention remonte à 1960 [1].

À ce jour les meilleurs résultats connus ne fournissent qu'un encadrement de $\chi(\mathbb{R}^2)$.

Pour obtenir une minoration de $\chi(\mathbb{R}^2)$, on reformule le problème dans le langage de la théorie des graphes. Un graphe est un ensemble de sommets reliés ou non entre eux par des arêtes. S'ils sont reliés entre eux, on dit qu'ils sont adjacents. On appelle nombre chromatique d'un graphe, le nombre de couleurs minimal permettant de colorier le graphe sans que deux sommets adjacents soient de même couleur. Le nombre chromatique du plan est alors le nombre chromatique du graphe formé par tous les points de \mathbb{R}^2 adjacents entre eux s'ils sont à distance 1. Or pour tout graphe G , tout sous-graphe (tous les points et arêtes du sous-graphes sont dans G) a un nombre chromatique inférieur ou égal à celui de G , puisque les coloriages de G évitant que deux points adjacents soient de même couleur gardent cette propriété dans le sous-graphe. Pour minorer $\chi(\mathbb{R}^2)$, on se sert alors de sous-graphes de \mathbb{R}^2 dont on est capable de déterminer le nombre chromatique.

Pour prouver que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 3$, on considère un graphe de trois points équidistants à distance 1, c'est-à-dire un triangle équilatéral. On constate qu'en se limitant à deux couleurs, tous les points étant adjacents deux-à-deux, il y aura forcément deux points adjacents de la même couleur. Ainsi, $\chi(\mathbb{R}^2) > 2$ et l'inégalité voulue est obtenue.

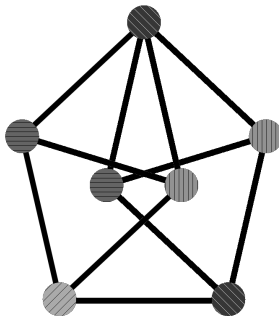


FIGURE 1 – Preuve visuelle à l'aide du graphe de Moser utilisé pour prouver que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$. (Cmglee, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons)

Pour prouver que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$, on considère alors le graphe de Moser (figure 1). On remarque alors que trois couleurs ne permettent pas de faire un coloriage sans que deux points adjacents soient de la même couleur. Si l'on considère par l'absurde que c'est possible, on peut considérer le point en haut de la figure 1 est rouge, forçant dans chaque triangle équilatéral les deux autres points à être chacun d'une couleur différente, forçant à leur tour les deux points adjacents en bas à être rouge, ce qui est contradictoire.

Ces résultats étaient connus très tôt dans l'histoire du problème et cet encadrement est longtemps resté le meilleur connu. À partir de 2018 cependant, des graphes beaucoup plus complexes générés par ordinateur (de plusieurs centaines ou milliers de sommets) ont permis de montrer que $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$. [2]

Pour obtenir une majoration de $\chi(\mathbb{R}^2)$, la méthode consiste plus simplement à déterminer un coloriage évitant que deux points à distance 1 soient de la même couleur. Les meilleurs coloriages de cette forme que l'on est capable de construire sont des coloriages à 7 couleurs. Le plus simple d'entre eux est appelé la carte de Heawood. L'idée est de considérer un pavage hexagonal du plan où chaque hexagone est de diamètre légèrement inférieur à 1 et est colorié de manière monochrome. On construit alors le coloriage selon les étapes représentées en figure 2. On peut colorier initialement une "fleur" constituée d'un hexagone central entouré de ses six adjacents coloriés chacun d'une couleur différente comme représenté en première image de la figure 2. On répète ensuite ce motif par des translations bien choisies. Plus précisément, on procède à une identification des côtés de la fleur. Cette notion sera définie rigoureusement par la suite. Elle consiste intuitivement à rassembler deux-à-deux des côtés qui doivent être l'image les uns des autres par les translations permettant de former le coloriage. Cette identification est représentée en deuxième image de la figure 2. Une fois le motif appliqué à la totalité du plan (image 3 de la figure 2), on remarque que deux hexagones de la même couleur ne peuvent pas être adjacents ou avoir un hexagone adjacent en commun. De cette manière, si on considère un point dans un hexagone, l'hexagone est trop petit pour qu'un point à distance 1 du premier soit dans le même hexagone, et les hexagones de même couleur les plus proches sont trop éloignés pour qu'un point à distance 1 puisse être dans l'un d'eux. Ce coloriage vérifie alors que deux points à distance 1 sont toujours de couleurs différentes. On en déduit donc que $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

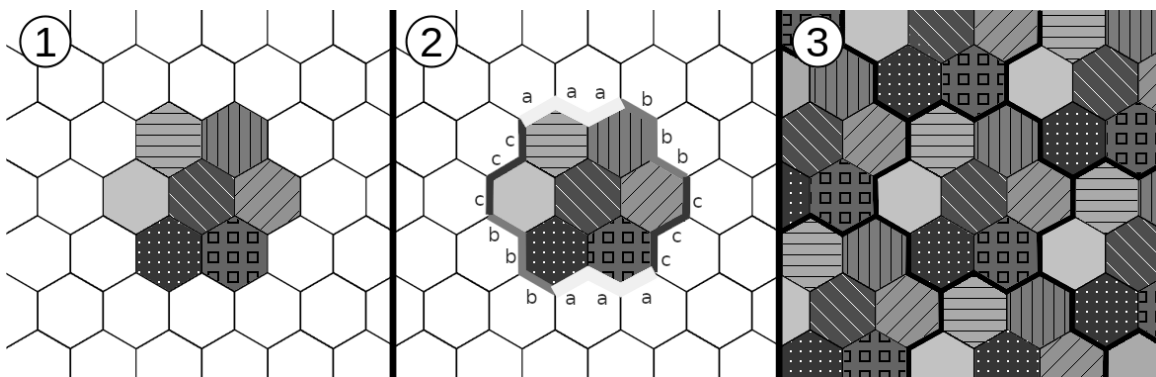


FIGURE 2 – Étapes de constructions de la carte de Heawood

En résumé, on a :

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$$

Achevons cette introduction par quelques commentaires :

- C'est à ce jour le meilleur encadrement connu.
- En outre, le fait de s'intéresser à une distance 1 dans ce problème est purement artificiel. Nous pouvons généraliser le problème pour une distance d quelconque, mais en raison de l'existence d'homothéties du plan (transformation du plan qui permet un changement d'échelle sur les distances et une conservation des angles), on peut toujours se ramener au cas où $d = 1$.
- Si ce problème est formulé dans le cadre du plan euclidien, il peut également être formulé dans le contexte d'autres géométries. Le but de ce qui suit est de s'intéresser au cas du plan hyperbolique.

Le plan hyperbolique dans le modèle du disque de Poincaré

Il existe plusieurs géométries en mathématiques. Celle qui nous paraît la plus familière est la géométrie euclidienne, car c'est elle qui est enseignée à l'école depuis notre enfance. Elle est basée sur des postulats, dictés par Euclide. On dit qu'il s'agit d'une géométrie à courbure nulle : si l'on considère une feuille de papier (qui est régie par les lois de la géométrie euclidienne) et qu'on la met à plat sur une table, elle recouvre tout l'espace. Maintenant considérons une orange : si on la pèle et que l'on souhaite mettre sa peau à plat, on remarquera qu'il y aura des "trous", la table sera visible à certains endroits. La peau d'orange est classée dans ce que l'on appelle la géométrie sphérique, il s'agit d'une géométrie non-euclidienne, dite à courbure positive. En effet, un postulat d'Euclide, celui qui dit que par un point il passe une *unique* droite parallèle à une droite donnée ne passant pas par ce point, est remplacé par le suivant : par un point il ne passe *aucune* droite parallèle à une droite donnée ne passant pas par ce point. Il existe un autre type de géométrie non-euclidienne, elle est cette fois-ci dite à courbure négative : il s'agit de la géométrie hyperbolique. Le principe est que si l'on essaie de mettre à plat une surface en géométrie hyperbolique, on observera qu'il y a un surplus de matière, un chevauchement. Cette fois-ci, par un point il passe une *infinité* de droites parallèles à une droite donnée ne passant pas par ce point. Et c'est cette géométrie qui nous intéresse dans cet article. Les droites en géométrie hyperbolique, à savoir le plus court chemin entre deux points donnés et son prolongement à l'infini, sont appelées géodésiques.

Il existe plusieurs modèles de géométrie hyperbolique en deux dimensions, aussi appelée plan hyperbolique. Nous nous contenterons d'étudier le "modèle du disque de Poincaré". Il est défini par l'ensemble des points du disque unité : $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, que l'on munit d'une distance différente de la distance euclidienne. Pour comprendre cette dernière, Henri Poincaré en a lui-même donné une représentation mentale :

"Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé. [...]

Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite. Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite." [9]

Propriété : Les géodésiques du disque de Poincaré sont les diamètres du cercle unité et les arcs de cercles euclidiens orthogonaux au bord du disque unité (les points du bord du disque unité exclus).

Les géodésiques peuvent s'intersecter. On peut mesurer l'angle que deux géodésiques forment en un point en mesurant l'angle euclidien entre les tangentes euclidiennes des géodésiques en ce point.

Propriété : La somme des angles d'un triangle en géométrie hyperbolique est strictement inférieure à π .

La trigonométrie hyperbolique

Par la suite nous utiliserons des relations de trigonométrie hyperbolique pour le calcul de distances.

Considérons un triangle hyperbolique de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ (figure 3). On a alors les relations suivantes [3] :

- $\cosh(c) = -\sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma) + \cosh(a)\cosh(b)$
- $\cos(\gamma) = \sin(\alpha)\sin(\beta)\cosh(c) - \cos(\alpha)\cos(\beta)$
- $\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$

Les isométries du plan hyperbolique

Définition : Les isométries du plan hyperbolique sont les transformations géométriques du plan hyperbolique qui conservent les distances hyperboliques.

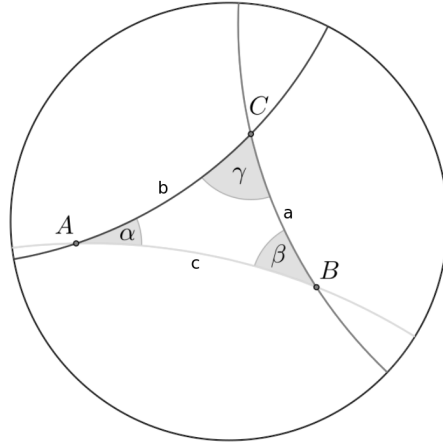


FIGURE 3 – Triangle dans le disque de Poincaré (MartinThoma, CC0 1.0 Universal, via Wikimedia Commons)

Les isométries du plan hyperbolique conservent donc la mesure des angles hyperboliques, les aires hyperboliques, les géodésiques, et l'alignement hyperbolique. Elles sont dites directes lorsqu'elles préservent l'orientation des angles, et indirectes lorsqu'elles envoient chaque angle orienté sur son opposé.

Dans le disque de Poincaré, l'ensemble des isométries directes est $\{z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}, a, b \in \mathbb{C}^2 \mid |a| > |b|\}$ et l'ensemble des isométries indirectes est $\{z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{b\bar{z}+a}, a, b \in \mathbb{C}^2 \mid |a| < |b|\}$.

Notons que le groupe des isométries du plan hyperbolique est isomorphe à certains groupes de matrices, c'est-à-dire à $PSL(2, \mathbb{R})$ ou $PSU(1, 1)$.

Parmi les isométries indirectes, on compte les réflexions. On peut les définir comme étant les inversions du plan euclidien, restreintes au disque unité.

On peut remarquer que les réflexions dans le plan hyperbolique sont les analogues des symétries axiales du plan euclidien. En effet, les réflexions sont des isométries et lorsque l'on compose une réflexion avec elle-même, on obtient l'identité (on dit que les réflexions sont des involutions)

Le problème du nombre chromatique du plan hyperbolique

Dans le plan hyperbolique, on peut reformuler le problème du nombre chromatique du plan ainsi :

On fixe $d > 0$. On cherche le nombre minimal de couleurs, noté $\chi(\mathbb{H}^2, d)$, permettant de créer un coloriage du plan hyperbolique de sorte à ce que tous points à distance d soient de couleurs différentes.

Une première particularité de ce problème est que contrairement au cas euclidien, en géométrie hyperbolique, le problème n'est pas réduit au cas de la distance 1. En effet, dans \mathbb{H}^2 , il n'y a pas d'homothéties, examinons pourquoi. Appliquée à un ensemble de points, elle doit multiplier les distances entre les points par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et conserver les angles formés entre eux. On peut cependant voir qu'une telle application n'est pas possible dans le plan hyperbolique (sauf pour $\lambda = \pm 1$), par une relation de trigonométrie hyperbolique. Si on suppose par l'absurde qu'on peut appliquer une homothétie de rapport $\lambda \neq \pm 1$ au triangle en figure 3, on a $\cos(\gamma) = \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(c) - \cos(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(\lambda c) - \cos(\alpha) \cos(\beta)$ donc $\cosh(c) = \cosh(\lambda c)$ ce qui est absurde.

Résultats connus préalablement

Le premier article à travailler sur $\chi(\mathbb{H}^2, d)$ [5] propose des premières bornes, améliorées par la suite [6, 7].

Au sujet des minoration, on obtient que pour tout $d > 0$, $\chi(\mathbb{H}^2, d) \geq 4$ et si $d = \operatorname{arccosh} \left(\frac{9+5\sqrt{5}+(4+\sqrt{5})\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{22} \right) \approx 1.37503$ alors $\chi(\mathbb{H}^2, d) \geq 5$ [7].

Pour les majorations connues, elles sont résumées ainsi dans le dernier article en date [7] :

$$\chi(\mathbb{H}^2, d) \leq \begin{cases} 9, & \text{si } d \leq 2 \ln 2 \approx 1.3863, \\ 12, & \text{si } 2 \ln 2 < d \leq 2 \ln 3 \approx 2.1972, \\ 5 \lceil \frac{d}{\ln 4} \rceil + 5, & \text{si } d \geq 2 \ln 3. \end{cases}$$

De manière plus fine, on peut noter que $\chi(\mathbb{H}^2, d) \leq (k+1)(\lceil \frac{d}{\ln(k)} \rceil + 1)$ pour tout $k \geq 2$ du moment que d est suffisamment grand. La majoration indiquée au dessus est asymptotiquement la meilleure, mais il est possible de légèrement améliorer le résultat pour d compris entre 2 et 143 environ [6].

Les majorations données ci-dessous s'appuient sur une méthode de construction de coloriage dite des "damiers hyperboliques". L'intérêt de cette méthode est de pouvoir construire un coloriage pour toute distance d et avec un nombre de coloriage à croissance asymptotiquement linéaire. Nous allons de notre part traiter le cas du coloriage analogue à la construction euclidienne décrite précédemment qui permet d'obtenir le résultat optimal, à savoir le coloriage de Heawood. Ce coloriage a déjà été brièvement abordé par le passé mais de manière assez incomplète, nous étudierons plus en profondeur ce cas. Il permet d'améliorer la majoration pour des valeurs de d assez petites [6].

Les pavages réguliers

Notre approche s'appuie sur une analyse des pavages du plan hyperbolique par des polygones réguliers. On note n le nombre de côtés du polygone utilisé et v la valence (c'est-à-dire le nombre de polygones adjacents en un sommet). Nous noterons alors $\{n, v\}$ un pavage régulier de n -gones réguliers de valence v . En considérant un polygone P au sein d'un pavage hyperbolique $\{n, v\}$, on appelle première couronne l'ensemble des polygones adjacents à une arête ou à un sommet de P .

Dans le plan euclidien, seuls trois pavages réguliers composés d'un unique polygone régulier existent, ils sont illustrés en figure 4.

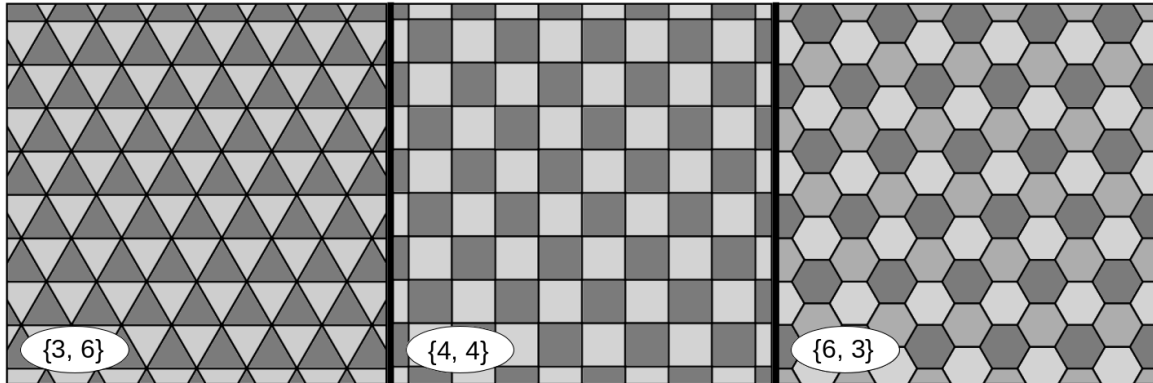


FIGURE 4 – Les pavages réguliers du plan euclidien : $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ et $\{6, 3\}$

En effet, on peut considérer un polygone régulier euclidien P à n côtés d'angles de mesure α . On le décompose en n triangles isocèles de base une arête et d'angles à la base $\frac{\alpha}{2}$, et de sommet le centre de ce dernier et d'angle au sommet $\frac{2\pi}{n}$. La somme des angles d'un triangle euclidien vaut π , donc $\frac{2\pi}{n} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \pi$, donc $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n}$. Soit v la valence du pavage considéré ; elle doit vérifier $v \cdot \alpha = 2\pi$. En résolvant alors l'équation entière $v \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi$ on trouve les seuls couples $\{n, v\}$ de solutions : $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ et $\{6, 3\}$.

L'intérêt de cette démonstration est qu'elle utilise la propriété que la somme des angles des triangles euclidiens vaut π . Cette propriété n'est pas vérifiée dans le plan hyperbolique, puisque la somme des angles des triangles hyperboliques est

strictement inférieure à π . En outre, si l'on considère un polygone hyperbolique, on peut lui appliquer les réflexions par rapport à chacun de ses côtés, les composer entre elles et espérer obtenir un pavage de tout le plan hyperbolique.

On peut alors former plus de pavages réguliers dans le plan hyperbolique que dans le plan euclidien, la seule condition étant d'avoir une valence strictement supérieure aux valences des pavages réguliers euclidiens :

Théorème : $\forall n, v \geq 3$, sauf pour $(n = 3 \text{ et } v \leq 6)$, $(n = 4 \text{ et } v \leq 4)$, $(n = 5 \text{ et } v \leq 4)$ et $(n = 6 \text{ et } v \leq 3)$, il existe un pavage régulier du plan hyperbolique $\{n, v\}$. [4]

Notre démarche consiste à regarder ce qu'il se passe dans un cas semblable au pavage régulier hexagonal du plan euclidien, c'est-à-dire en prenant les pavages réguliers hyperboliques de valence $v = 3$.

On déduit de théorème ci-dessus que le plus petit n avec $v = 3$ qui définit un pavage $\{n, v\}$ hyperbolique est $n = 7$. Si on pense à ce pavage comme à l'analogue du pavage euclidien hexagonal, il est naturel d'essayer de produire l'analogue de la carte de Heawood. Nous nous concentrerons donc sur ce cas.

Lorsque l'on dit que l'on colorie un polygone d'une certaine couleur, on fixe la couleur de tous les points intérieurs, la couleur de chaque point de la frontière est quelconque mais nécessairement de la couleur d'un des polygones adjacents.

Pour obtenir un coloriage intéressant, nous cherchons à obtenir un coloriage du pavage $\{7, 3\}$ vérifiant la propriété suivante :

Notre règle de coloriage : Pour tous heptagones A et B, s'il existe un heptagone C tel que C est adjacent à A et B est adjacent aux deux heptagones adjacents à C opposés à A, alors A et B sont de la même couleur (Figure 5).

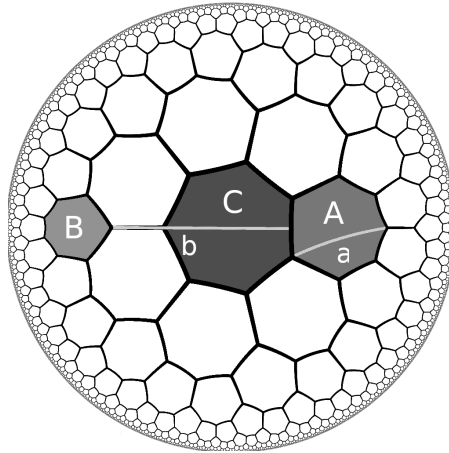


FIGURE 5 – Représentation de notre règle de coloriage. De plus, le diamètre a est représenté dans A de droite ainsi que la distance b entre les heptagones A et B.

Résultat

On note a le diamètre des heptagones du pavage (voir figure 5), en utilisant les relations de trigonométrie hyperbolique on a :

$$a = \operatorname{arccosh} \left(\frac{(\cos(\frac{2\pi}{7}) + 1)^2}{3 \sin^2(\frac{2\pi}{7})} (1 - \cos(\frac{6\pi}{7})) + \cos(\frac{6\pi}{7}) \right) \approx 1.21357875724273908$$

On note aussi b la distance minimale entre deux heptagones de la même couleur (donnée par la condition voulue, voir figure 5), on a alors :

$$b = \operatorname{arccosh} \left(\frac{4 \cos(\frac{2\pi}{7}) + 1}{3} \right) + \operatorname{arccosh} \left(\frac{\cos(\frac{2\pi}{7}) + 1}{\sqrt{3} \sin(\frac{2\pi}{7})} \right) + \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{7})} \right) \approx 1.73220287604524371$$

Dans un pavage $\{7, 3\}$ vérifiant notre règle de coloriage, si $a < d < b$, alors pour tout point de \mathbb{H}^2 , tout autre point à distance d est dans un autre heptagone que le premier et de couleur différente. Ce qui prouve le théorème suivant.

Théorème :

$$\forall d \in]a, b[, \chi(\mathbb{H}^2, d) \leq 8$$

$$\forall d \in [1.22, 1.77], \chi(\mathbb{H}^2, d) \leq 8$$

Le but de ce qui suit est de démontrer rigoureusement qu'il existe bien un coloriage de \mathbb{H}^2 respectant notre règle.

Preuve

De manière analogue au cas euclidien, pour construire ce coloriage, on cherche à identifier un domaine fondamental, c'est-à-dire un motif pouvant être répété à d'autres endroits du plan à l'aide d'un ensemble d'isométries, de sorte à paver la totalité du plan. On a commencé par réaliser un coloriage à la main à l'aide de notre règle de construction. Il nous a semblé que ce coloriage pouvait être étendu à tout le plan hyperbolique et qu'il n'existait que trois configurations par couleur. Cela signifie qu'il n'y a que trois agencements de couleurs autour de chaque polygone d'une couleur donnée. C'est pour cette raison que nous avons décidé de considérer le polygone que l'on notera D , qui n'est pas régulier ni convexe, composé de 24 heptagones : trois heptagones verts mais de configurations différentes ainsi que leurs premières couronnes (figure 6). Nous montrerons que D est un domaine fondamental de notre coloriage.

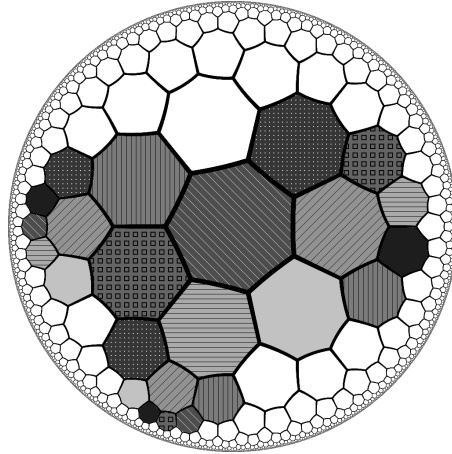


FIGURE 6 – Ensemble de polygones candidat à former un domaine fondamental

Nous utiliserons le fait qu'il est un polygone de Poincaré et donc un domaine fondamental pour un groupe d'isométries engendrant le coloriage. Les définitions et théorèmes utilisés par la suite sont issus d'un article de Bernard Maskit [8].

Identifications

Définition : Une identification sur un polygone P assigne, à chaque côté s , un côté s' et une isométrie $A(s, s')$, que l'on appelle générateur identifiant, de sorte que :

- a) $A(s, s')$ envoie s sur s'

- b) $(s')' = s$ et $A(s', s) = (A(s, s'))^{-1}$
- c) si $s = s'$, alors l'identification sur s est l'identité
- d) pour chaque côté s de P , il existe un voisinage V de s tel que, en posant $A(s, s') = A$, $A(V \cap P) \cap (P \setminus s') = \emptyset$

On procède aux identifications des arêtes de D (figure 7), et l'on note G_D le groupe engendré par ses générateurs identifiants.

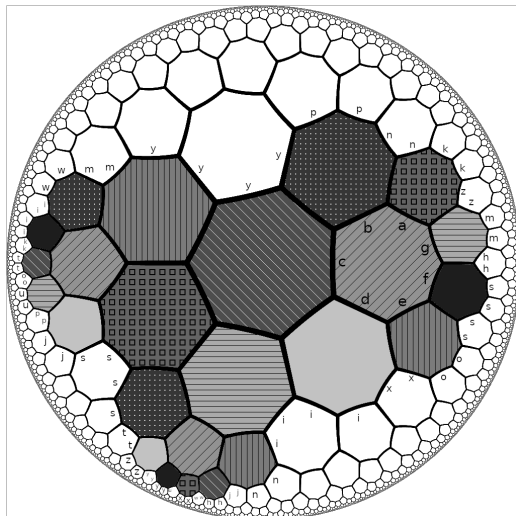


FIGURE 7 – Identifications d'arêtes de D (chaque couleur d'arête identifie deux arêtes) et attribution du nom des réflexions par rapport aux arêtes de l'heptagone de référence dans D

On considère que l'identification entre deux arêtes constitue une relation d'adjacence entre les heptagones contenant ces arêtes à l'intérieur du domaine. De fait, cette identification est bien choisie de sorte à ce que la condition sur les couleurs soit bien respectée à l'intérieur du domaine. Si on peut effectivement paver le plan avec ce domaine, notre règle sera respectée sur tout le plan, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'une règle de construction.

L'idée est analogue à l'identification pratiquée sur l'ensemble de sept hexagones du pavage euclidien, où les côtés étaient identifiés de sorte à reproduire le motif par translation en s'assurant que les hexagones de même couleur restent suffisamment éloignés. Ici cependant, nous ne disposons pas de translations, chaque isométrie est l'unique isométrie directe envoyant un côté sur son côté associé. On remarque que l'ensemble de ces isométries est invariant par rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour du point central du polygone (intersection entre les heptagones rouge, bleu clair et orange). On peut expliciter ces applications en les notant comme une composition d'un nombre pair de réflexions (étant des isométries indirectes) par rapport aux géodésiques d'un heptagone de référence.

On choisit un heptagone de référence ; dans la figure 7, il s'agit de l'heptagone vert en haut à droite. On étudie les réflexions par rapport à chaque arête de ce dernier, que l'on nommera par les sept premières lettres de l'alphabet, comme schématisé en figure 7.

Lorsque l'on applique n réflexions successives à un heptagone, on prend la convention d'écrire les n lettres associées à ces dernières dans l'ordre où on les applique, à savoir de gauche à droite, avec la condition de réduire notre expression : si deux lettres successives sont identiques, elles forment l'identité.

On pose $\alpha_1 = fcfc$, $\alpha_2 = gcgc$, $\alpha_3 = bfbfc$, $\alpha_4 = eaedagdcgc$ et $\alpha_5 = aeabefbfc$, pour générer les dix autres générateurs identifiants, on applique une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ en composant par $r = cefc$ et son inverse. G_D s'exprime alors sous la forme :

$$G_D = \langle r^j \alpha_i r^{-j} \mid j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \rangle$$

Condition du cycle

Définition : On appelle cycle de sommets une suite de sommets obtenue par le processus suivant :

On part d'un sommet s_1 , on prend une des deux arêtes auxquelles ce sommet appartient et on applique le générateur identifiant associé, on note s_2 l'image de s_1 . On considère l'autre arête contenant s_2 (c'est-à-dire celle qui n'est pas l'image de l'arête pour laquelle on a appliqué le générateur identifiant) et on répète ce processus jusqu'à ce que l'on trouve $s_i, i \in \mathbb{N}$, tel que $s_i = s_1$, pour produire tous les termes de la suite.

Définition : On appelle angle d'un cycle la somme des angles sur chacun des sommets du cycle.

Définition : On dit que la condition du cycle est respectée si l'angle du cycle est égale à 2π .

Dans notre cas, on peut vérifier que D forme des cycles de 3 sommets, pour tout sommet entre deux ensembles d'arêtes identifiées. Chaque sommet est de valence 3, et forme un angle aigu avec ses arêtes ; chaque angle ainsi formé vaut $\frac{2\pi}{3}$, la somme des angles dans chaque cycle de sommets vaut $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi$.

Polygone de Poincaré

Définition : on appelle polygone de Poincaré un polygone P qui vérifie les conditions suivantes :

1. P est un polygone avec une identification
2. La condition du cycle est vérifiée

Théorème (des polygones de Poincaré) : Soit P un polygone de Poincaré. Soit G le groupe engendré par les générateurs identifiants. Alors P pave le plan sous l'action de G .

On vérifie que D respecte toutes les conditions d'un polygone de Poincaré (on peut par ailleurs remarquer que D est une surface de genre 3) et le groupe G_D engendré par ses générateurs identifiants lui est associé. On en déduit que D est bien un domaine fondamental. Or, par construction de D et de son identification, notre condition initiale sur les couleurs est respectée sur tout le coloriage. C'est-à-dire que l'on peut effectivement construire un coloriage à partir d'un pavage $\{7, 3\}$ qui évite que deux points à distance $d \in]a, b[$ soient de la même couleur. Ce qui conclut notre preuve. Un aperçu de ce coloriage est donné en figure 8 en nuances de gris, et en couverture en couleurs.

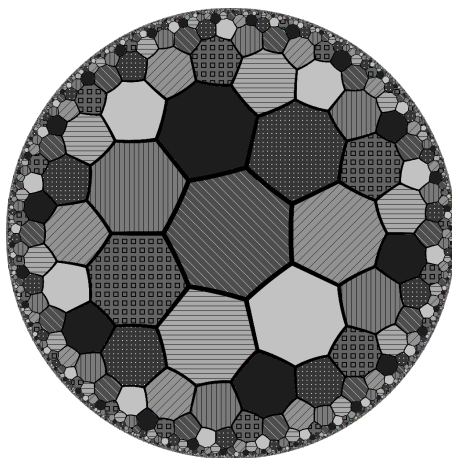


FIGURE 8 – Aperçu du coloriage de \mathbb{H}^2 selon nos règles

Conclusion et perspectives

En conclusion, à l'issue de cet article nous pouvons actualiser la majoration de $\chi(\mathbb{H}^2, d)$. Elle devient :

$$\chi(\mathbb{H}^2, d) \leq \begin{cases} 9, & \text{si } d \leq a \approx 1.2136, \\ 8, & \text{si } a < d < b \approx 1.7322, \\ 12, & \text{si } b \leq d \leq 2 \ln 3 \approx 2.1972, \\ 5 \lceil \frac{d}{\ln 4} \rceil + 5, & \text{si } d \geq 2 \ln 3. \end{cases}$$

Pour certaines valeurs légèrement supérieures à l'intervalle que nous avons étudié (où la majoration actuelle est de 12), une méthode analogue à l'aide d'un pavage octogonal pourrait permettre de produire un coloriage à seulement 9 ou 10 couleurs. En effet, la taille des polygones d'un tel pavage est dépendante des angles, elle est croissante avec le nombre de côtés. Des pavages $\{n, 3\}$ avec $n > 7$ pourraient améliorer les majorations de $\chi(\mathbb{H}^2, d)$ pour des d légèrement plus élevés. Pour des valeurs de d plus grandes cependant, cette méthode sera nécessairement moins bonne que les majorations actuelles. On estime qu'asymptotiquement, cette méthode croit de manière exponentielle avec d . L'étude de tous ces autres cas est l'objet d'un travail en cours.

Remerciements

Ce travail est le fruit d'un stage de L1 à l'Université d'Aix-Marseille.

Nous tenons à remercier sincèrement nos encadrants de stage à l'Institut de Mathématique de Marseille, Thierry COULBOIS et Lionel NGUYEN VAN THÉ. En effet, nous travaillions initialement tous deux sur des sujets de stage bien distincts. Alors, merci d'avoir accepté que nous convergions dans cette direction et nous avoir soutenu tout au long de ce travail.

Nous tenons à remercier également Nicolas BÉDARIDE et Frédéric PALÉSI, responsables de la licence MPC1 au sein de laquelle nous étudions, ainsi que les chercheurs de l'I2M Adrien BOULANGER, Martin MION-MOUTON et Joffrey MATTHIEN.

Contact

Loryne BARROCHE : loryne.barroche@gmail.com

Lilian PORRE : lilian.porre@proton.me

Références

- [1] Alexander Soifer, *The Mathematical Coloring Book : Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*, Springer-Verlag, Part II.3, 21-31 (2009).
- [2] Aubrey de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, Geombinatorics 28, No. 1, 18-31 (2018).
- [3] Peter Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Birkhäuser Verlag, Chapter 2, Theorem 2.2.1 (1992).
- [4] Wilhelm Magnus, *Noneuclidean tessellations and their groups*, Academic Press New York and London, Chapter II.5, Theorem 2.8 (1974).
- [5] Benoît R. Kloeckner, *Coloring distance graphs : a few answers and many questions*, Geombinatorics 24, No. 3, 117-134 (2015).
- [6] Hugo Parlier, Camille Petit, *Chromatic numbers for the hyperbolic plane and discrete analogs*, Preprint, arXiv :1701.08648 [math.CO] (2017).
- [7] Geoffrey Exoo, Dan Ismailescu, *A 5-chromatic same-distance graph in the hyperbolic plane*, Geombinatorics 32, No. 4, 145-158 (2023).
- [8] Bernard Maskit, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Adv. Math. 7, 219-230 (1971).
- [9] Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, 1902, Flammarion, Collection "Bibliothèque de philosophie scientifique", Chapitre IV, LE MONDE NON EUCLIDIEN