Représentations linéaires (complexes de dimension finie des groupes finis)

Thomas Dedieu

Printemps 2019, compilé le 26 août 2019

Avertissement. Ceci n'est pas un polycopié de cours. Ce texte est constitué de mes notes personnelles pour un cours de préparation à l'agrégation, grossièrement mises en forme. Néanmoins, si vous trouvez des erreurs il m'intéresse que vous me les communiquiez.

1 – Définitions et exemples

« Un groupe c'est fait pour agir. » Les *actions linéaires* (*i.e.* sur un ev par applications linéaires) constituent un cas particulier important, pour lequel on a des techniques spécifiques efficaces. Dualement, on peut aussi chercher à étudier les groupes à travers ces actions spécifiques.

On peut voir l'étude des représentations linéaires comme l'étude des groupes de symétries des espaces vectoriels. Étant donné un groupe abstrait, de quel manière peut-il se réaliser comme groupe d'automorphismes d'espaces vectoriels ?

D'autre part l'étude des représentations constitue une généralisation de la théorie de la réduction des endomorphismes. On va chercher une réduction simultanée pour tout un groupe d'automorphismes.

(1.1) Définition. *Une représentation d'un groupe G sur un $\mathbf{k}$-ev V de dimension finie est la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

Le degré *d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est la dimension de l'espace vectoriel V.*

On devrait noter '(V, ρ)', mais souvent on note simplement 'V'. On reprend aussi les notations des actions de groupes, $g.x$ ou même gx est $\rho(g)(x)$. Implicitement, toutes les représentations considérées dans ces notes sont de dimension finie.

Il est commode de voir formellement une représentation comme un G-espace vectoriel.

(1.2) Exemple, I. Tous les groupes déjà linéaires. On se souvient en particulier de $\mathrm{D}_n < \mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ (groupe diédral), et $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5 < \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$. Noter que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}), \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Pour les groupes qui sont par définition linéaire (par exemple, ceci exclut $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$), la représentation tautologique correspondante est appelée *représentation standard.*

(1.3) Exemple, II : groupes monogènes ; groupes abéliens finis. Une représentation de $\mathbf{Z}$ sur V est la donnée de $f \in \mathrm{GL}(V)$. Une représentation de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur V est la donnée de $f \in \mathrm{GL}(V)$ annulé par $X^n - 1$; si par exemple $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, un tel f est diagonalisable.

Une représentation de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ sur V est la donnée de $f, g \in \mathrm{GL}(V)$ annulés par $X^n - 1$ et $X^m - 1$ respectivement, simultanément diagonalisables.

Si G est un groupe abélien fini, toutes ses représentations complexes sont données par des isomorphismes simultanément diagonalisables. Si on veut on peut voir ça à travers le théorème de classification des groupes abéliens de type fini, mais pour le démontrer on utilise simplement le théorème de Lagrange et le critère de simultanée diagonalisabilité. Ceci sera généralisé par le Lemme de Schur.

(1.4) Exemple, III : représentations de permutation. Une action $G \circlearrowleft X$ sur un ensemble fini induit une représentation sur $\langle X \rangle_{\mathbf{k}}$ (groupe abélien libre sur X, tensorisé par $\mathbf{k}$ au dessus de $\mathbf{Z}$). Concrètement, on prend une base $e_{x_1}, \ldots, e_{x_n}$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = X$, on décrète $ge_{x_i} := e_{g.x_i}$, et on étend cette action par linéarité.

Dualement, on peut considérer $\mathbf{k}^X$ ($:= \mathcal{F}(X, \mathbf{k})$, rappel), muni de la base des fonctions de Dirac δ_{x_i}. On vérifie que $\delta_{g.x}(t) = \delta_x(g^{-1}.t)$, donc l'action correspondante est

$$\forall g \in G,\ \forall f \in \mathbf{k}^X \quad : \quad g.f = \big(t \in X \mapsto f(g^{-1}.t) \in \mathbf{k}\big).$$

(1.5) Représentation régulière. Pour G groupe fini, l'action à gauche $G \circlearrowleft G$ par translation ("$g.h = gh$") rentre dans le cadre de (1.4) ci-dessus ; on appelle *représentation régulière* la représentation de permutation correspondante, notée R_G.

La représentation régulière est fidèle : le morphisme $R_G : G \to \mathrm{GL}(\mathbf{k}^G)$ est injectif.

(1.6) Somme directe de représentations. On considère V_1, V_2 deux représentations (c'est-à-dire en fait (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2)) du même groupe G sur un même corps $\mathbf{k}$. On dispose du $\mathbf{k}$-espace vectoriel $V_1 \oplus V_2$ "somme directe abstraite" (si on veut, c'est simplement $V_1 \times V_2$), qu'on promeut en représentation de G en définissant $\rho(g) = (\rho_1(g), \rho_2(g))$. On peut considérer ceci comme une somme directe de G-espaces vectoriels.

Matriciellement, la *représentation somme directe* $V_1 \oplus V_2$ est donnée par des matrices diagonales par blocs.

(1.7) Représentation Hom**.** Comme précédemment, on considère V_1, V_2 deux représentations du même groupe G sur un même corps $\mathbf{k}$. On définit une représentation $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, c'est-à-dire $\big(\mathcal{L}(V_1, V_2), \rho_{\mathcal{L}(V_1,V_2)}\big)$ sur le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}(V_1, V_2)$ en appliquant le principe de conjugaison :

$$\begin{aligned} \forall g \in G,\ \forall f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\ :\quad \rho(g)(f) &= \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g)^{-1} \\ &= \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1}) \\ (i.e.\ gf &= gfg^{-1}) \end{aligned}$$

(à gauche, $gf = g.f = \rho(g)(f)$, à droite $gfg^{-1} = g \circ f \circ g^{-1}$, où le premier g dans le sens de la lecture est $\rho_2(g)$ et le deuxième est $\rho_1(g)^{-1}$).

Il est intéressant de voir $\rho(g)(f)$ comme l'unique application linéaire $V_1 \to V_2$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"', "\cong"] & V_2 \arrow[d, "g", "\cong"'] \\ V_1 \arrow[r, "g\cdot f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

(exercice : il existe en effet une unique telle application linéaire). J'attire l'attention sur le fait que dans ce diagramme les flèches verticales sont des isomorphismes, puisque g agit toujours par isomorphismes (en l'occurence $\rho_1(g)$ et $\rho_2(g)$), mais les flèches horizontales n'ont aucune raison d'être inversibles (on doit définir $g.f = \rho(g)(f)$ pour toute application linéaire f).

Cette opération munit $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}(V_1, V_2)$ d'une structure de G-espace vectoriel.

(1.8) Contragrédiente. C'est la représentation duale d'une représentation V, au sens du paragraphe (1.7) :

$$\forall g \in G,\ \forall \ell \in V^\vee\ :\quad \rho_V^\vee(g)(\ell) = \rho_{\mathrm{triv}}(g) \circ \ell \circ \rho_V(g)^{-1} = \ell \circ \rho_V(g)^{-1},$$

autrement dit

$$\rho^\vee(g) = {}^{\mathsf{T}}\rho(g)^{-1} \in \mathrm{GL}\big(V^\vee\big). \tag{1.8.1}$$

Une façon d'écrire les conditions du paragraphe (1.7) spécifique au contexte de la dualité est d'imposer :

$$\forall g \in G,\ \forall v \in V,\ \forall \ell \in V^\vee\ : \langle \rho_V^\vee(\ell), \rho_V(v)\rangle = \langle \ell, v\rangle.$$

Contrairement à ce qu'un sondage aurait pu donner, (1.8.1) est la définition naturelle. Se souvenir par exemple de la formule de changement de base $\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_E^\vee, \mathcal{B}_F^\vee) = {}^{\mathsf{T}}(\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F))^{-1}$.

2 – Dévissage

2.1 – Position du problème

(2.1) La catégorie des k-représentations linéaires d'un groupe G. Il nous reste à définir la notion de morphisme entre deux représentations V et W de G. On définit un tel morphisme comme une application $\mathbf{k}$-linéaire $\phi : V \to W$ qui fait commuter tous les diagrammes,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"', "\cong"] & W \arrow[d, "g", "\cong"'] \\ V \arrow[r, "\phi"'] & W \end{tikzcd}$$

pour tout $g \in G$. On parle aussi d'*application G-linéaire* : pour tout $x \in V$ et $g \in G$, $\phi(gx) = g\phi(x)$. Dans la terminologie classique, on les appelle *opérateurs d'entrelacement*, ce qui se justifie par la condition qu'on leur impose,

$$\phi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \phi.$$

Attention à ne pas confondre les morphismes de représentations et la notion de représentation morphisme. On note $\mathcal{L}_G(V, W)$ (ou $\mathrm{Hom}_G(V, W)$) l'ensemble des morphismes de représentations $V \to W$; c'est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel. On remarque que c'est la partie de $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}(V, W)$ invariante pour la représentation $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ induite par ρ_V et ρ_W : soit $\phi \in \mathcal{L}_{\mathbf{k}}(V, W)$,

$$\phi \in \mathcal{L}_G(V, W) \;\Leftrightarrow\; \forall g \in G \,:\, g\phi = \phi.$$

(2.2) Sous-représentations. Une sous-représentation de V est un sous-espace vectoriel G-stable, c'est-à-dire un $\mathbf{k}$-sev $W \subseteq V$ tel que

$$\forall g \in G,\; \forall x \in W \;:\; gx \in W.$$

(On pourrait parler de G-sous-espace vectoriel).

Autrement dit, W est une sous-représentation si et seulement si la représentation sur V induit une représentation sur W.

(2.2.1) Sous-représentations supplémentaires. Soit W et W' deux sous-représentations de V. On dit que ce sont des sous-représentations supplémentaires si les sev W et W' de V sont supplémentaires. On a alors $V = W \oplus W'$ en tant que représentation de G.

(2.2.2) Exercice. a) Démontrer que le noyau et l'image d'une application G-linéaire $\phi : V \to W$ sont des sous-représentations de V et W respectivement.
b) Soit W et W' deux représentations supplémentaires de V. Démontrer que le projecteur sur W dans la direction de W' est un morphisme de représentations.

(2.2.3) Exercice. Soit V la représentation de $\mathbf{Z}$ correspondant à $f \in \mathrm{GL}(V)$. Les sous-représentations de V correspondent biunivoquement aux sous-espaces de V stables par f.

(2.3) Définition. Une représentation V est *irréductible* si elle ne possède aucune sous-représentation non-triviale. (On pourrait parler de représentation *simple*).

Une représentation V est *semi-simple* si pour toute sous-représentation W, il existe une sous-représentation W' supplémentaire de W, *i.e.* telle que $V = W \oplus W'$.

(2.3.1) Exercice. Soit V la représentation de $\mathbf{Z}$ correspondant à $f \in \mathrm{GL}(V)$. V est irréductible (resp. semi-simple) ssi f est simple (resp. semi-simple).
(Rappel : f est simple (resp. semi-simple) ssi le polynôme caractéristique χ_f est irréductible) (resp. aucun carré non constant ne divise le polynôme minimal μ_f)).

(2.3.2) Exemple. *La représentation de permutation associée à une action $G \circlearrowleft X$ sur un ensemble fini (voir (1.4)) possède toujours une sous-représentation triviale, et n'est donc jamais irréductible.*

En effet le vecteur $e_{\mathrm{tot}} := \sum_{x\in X} e_x \in \mathbf{k}^X$ est invariant sous l'action de G. Le sev $\mathbf{k}.e_{\mathrm{tot}}$ constitue donc une sous-représentation de $\mathbf{k}^X$, isomorphe à la représentation triviale de G. Dans la version intrinsèque, la fonction constante $\mathbf{1} \in \mathbf{k}^X$ est invariante sous l'action de G, est engendre une sous-représentation triviale de $\mathbf{k}^X$.

(2.4) On va montrer que dans la situation où $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ et G est un groupe fini, toutes les représentations sont semi-simples, et donc se cassent en sommes directes de représentations irréductibles. Comparons cette situation à ce que l'on obtient en affaiblissant un peu les hypothèses.
(2.4.1) Les représentations de $\mathbf{Z}$ *ne sont pas toutes semi-simples.* Supposons que $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$. On rappelle qu'ainsi les endomorphismes semi-simples de V sont les diagonalisables. Donner une description des représentations semi-simples de $\mathbf{Z}$. Exhiber une représentation de $\mathbf{Z}$ qui n'est pas semi-simple.

(2.4.2) Représentation non semi-simple d'un groupe cyclique en caractéristique positive. Si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, un endomorphisme annulé par $X^n - 1$ est toujours diagonalisable. Exhiber un contre-exemple en caractéristique positive (par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est annulée par $X^p - 1$ en caractéristique p ; $X^p - 1 = (X-1)^p$ en caractéristique p). Exhiber une $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ qui n'est pas semi-simple.

(2.4.3) Décomposition des représentations de $\mathbf{Z}$. La théorie de la réduction des endomorphismes nous a appris que toute représentation de $\mathbf{Z}$ sur un espace vectoriel V sur $\mathbf{k}$ corps quelquconque se décompose en somme directe de représentations $\mathbf{k}[X]/(P)$, mais ces représentations ne sont pas simples en général.
(Plus précisément, soit V la représentation de $\mathbf{Z}$ donnée par $f \in \mathrm{GL}_{\mathbf{k}}(V)$. On a $V = \mathbf{k}[X]/(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}[X]/(P_r)$ où les P_i sont les facteurs invariants de f. En fait il vaut mieux voir la théorie de la réduction des endomorphismes comme l'étude des représentations d'algèbre de $\mathbf{k}[X]$, notamment pour éviter d'avoir à supposer que f est un automorphisme.)

Pour le reste de ces notes, on se place dans la situation où $\mathbf{k} = \mathbf{C}$
et G est un groupe fini (et toutes les représentations sont de
dimension finie).

(2.5) Remarque (on l'a déjà vu, mais je le souligne)**.** Soit (V, ρ) une représentation complexe (de dimension finie) d'un groupe fini G. Pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
(Le corps des scalaires est $\mathbf{C}$, et g est annulé par $X^n - 1$ d'après le théorème de Lagrange ($n = |G|$)).

(2.6) Exercice. On considère G groupe abélien (fini, donc). Montrer que toute représentation (complexe, donc) de G est semi-simple, et que toute représentation (toujours complexe) irréductible de G est de degré 1.
(Montrer que tous les $\rho(g)$ sont simultanément diagonalisables).

2.2 – Résultats de semi-simplicité

(2.7) Proposition (Théorème de Maschke). *Soit G un groupe fini. Toute représentation linéaire (de dimension finie) de G est semi-simple.*

Preuve. Soit W une sous-représentation de V. On considère un sev H supplémentaire de W dans V (il n'a aucune raison d'être une sous-représentation), et $\pi \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V, V)$ la projection sur W dans la direction de H. On construit

$$\pi_G = \sum_{g \in G} g\pi g^{-1} \in \mathcal{L}(V)$$

(comme d'habitude, $g\pi g^{-1} = \rho(g)\pi\rho(g^{-1})$). On vérifie que i) c'est une application G-linéaire, ii) $\pi_G|_W = \mathrm{id}_W$, et iii) $\mathrm{im}(\pi_G) \subseteq W$. Ces trois conditions impliquent que π_G est un projecteur G-linéaire sur W. Son noyau est donc une sous-représentation de V, supplémentaire de W. □

(2.7.1) Remarque. En fait il est inutile de supposer $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ pour la preuve ci-dessus. D'ailleurs, la même preuve fonctionne pour les représentations continues des groupes *compacts*, en sommant sur G relativement à la mesure de Haar.

(2.7.2) Variante : produit scalaire hermitien G-invariant. La même idée permet de fabriquer un produit scalaire hermitien G-invariant pour toute représentation complexe V d'un groupe fini : on en prend un n'importe comment, h, et on définit

$$h_G(x, y) = \sum_{g \in G} h(gx, gy).$$

(*Exercice* : montrer que c'est bien un produit scalaire hermitien ; ce n'est pas complètement débile).

Alors pour toute sous-représentation W de V, $W^\perp$ est une sous-représentation, et elle est supplémentaire. (Que se passe-t-il si W est seulement un $\mathbf{C}$-sev ?)

On gagne par rapport à la preuve donnée ci-dessus qu'on peut rapporter ce produit scalaire invariant à la maison, et c'est utile pour certaines applications géométriques. Voir notamment [H2G2, Vol. II, Chap. X].

(2.8) Proposition (Lemme de Schur). *Soit V, W deux représentations irréductibles de G, $\phi : V \to W$ une application G-linéaire.*
(2.8.1) Si $\phi \neq 0$, alors c'est un isomorphisme.
(2.8.2) Si $V = W$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\phi = \lambda.\mathrm{id}$.

Preuve. Pour le premier point, il suffit de noter que le noyau et l'image de ϕ sont des sous-représentations (ou G-sev) de V et W respectivement, puisque ϕ est G-linéaire.

Pour le second point, on considère λ une valeur propre de ϕ comme application $\mathbf{C}$-linéaire (il en existe toujours au moins une sur $\mathbf{C}$) ; ensuite le sous-espace propre $\ker(\phi - \lambda.\mathrm{id})$ est une sous-représentation non-nulle de V, puisque $\phi - \lambda.\mathrm{id}$ est G-linéaire. □

(2.9) Corollaire. *Soit V une représentation linéaire de G. Il existe des suites a) de représentations irréductibles $\mathsf{V}_1, \ldots, \mathsf{V}_N$ deux à deux non-isomorphes, et b) d'entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_N$, uniques à permutations près et telles que*

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathsf{V}_i^{\oplus a_i}.$$

Pour chaque i, il existe une unique sous-représentation V_i de V isomorphe à $\mathsf{V}_i^{\oplus a_i}$, appelée composante isotypique *de type V_i de V.*

Autrement dit, il existe pour tout $i = 1, \ldots, N$ des G-sev $V_{i,1}, \ldots, V_{i,a_i}$ de V, G-isomorphes à V_i, tels que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} \big(V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,a_i}\big).$$

Pour tout $i = 1, \ldots, N$ la composante $V_{\text{type } i} = V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,a_i}$ est canoniquement déterminée, mais sa décomposition en $V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,a_i}$ n'est pas unique (voir la preuve ci-dessous, et l'Exemple (2.10)).

Preuve. L'existence d'une décomposition est donnée par le Théorème de Maschke par récurrence sur la dimension, et l'unicité vient du Lemme de Schur.

Il convient sans doute de préciser un peu ce dernier point. Considérons deux décompositions

$$V = \bigoplus_{i=1}^{N} (V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,a_i}) \tag{2.9.1}$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{N} (W_{i,1} \oplus \cdots \oplus W_{i,b_i}), \tag{2.9.2}$$

où $V_{i,r} \cong \mathsf{V}_i$ et $W_{i,s} \cong \mathsf{V}_i$ pour tout $r = 1, \ldots, a_i$, et $s = 1, \ldots, b_i$ (quitte à rallonger la liste des représentations irréductibles et à autoriser des a_i ou b_i nuls, on peut supposer que c'est la même liste pour les deux décompositions).

Relativement à ces deux décompositions, id_V se décompose en $(\sum a_i) \times (\sum b_i)$ composantes

$$I_{i,r}^{j,s} : V_{i,r} \to W_{j,s}$$

(le morceau $I_{i,r}^{j,s}$ est la restriction à $V_{i,r}$ du projecteur G-linéaire $V \to W_{j,s}$ donné par la décomposition (2.9.2)). Le Lemme de Schur nous dit que $I_{i,r}^{j,s} = 0$ si $i \neq j$, donc id_V est "diagonale par blocs", c'est-à-dire qu'elle se décompose en morceaux

$$I_i : V_{\text{type } i} := V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,a_i} \to W_{\text{type } i} := W_{i,1} \oplus \cdots \oplus W_{i,b_i}.$$

Chacun de ces morceaux I_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, est nécessairement un isomorphisme, puisqu'on est devant une décomposition diagonale d'un isomorphisme. Ceci conclut la preuve. □

Il existe en revanche des automorphismes non-triviaux de la composante $V_{\text{type } i}$ dès que $a_i > 1$, et les sous-représentations $V_{i,1}, \ldots, V_{i,a_i}$ ne sont pas canoniquement définies dans ce cas. Chaque morceau I_i dans les notations de la preuve est donné par blocs

$$I_i = \begin{pmatrix} I_{i,1}^{i,1} & \cdots & I_{i,a_i}^{i,1} \\ \vdots & & \vdots \\ I_{i,1}^{i,b_i} & \cdots & I_{i,a_i}^{i,b_i} \end{pmatrix},$$

et chaque bloc est une matrice diagonale par le Lemme de Schur, mais on n'en sait guère plus. Si $\dim(V_i) = 1$, cette matrice est complètement quelconque.

(2.10) Exemple. Le G-sev V^G des invariants est la composante isotypique de V correspondant à la représentation irréductible triviale (de dimension 1).

N'importe quelle décomposition de V^G en somme de droites vectorielles est une décomposition de V^G en somme de sous-représentations irréductibles triviales.

La théorie des caractères décrite à la Section suivante va permettre non seulement d'écrire explicitement cette décomposition, y compris les projections correspondantes, mais aussi d'établir que pour tout groupe G il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

3 – Caractères et fonctions centrales

3.1 – Caractères

(3.1) Définition. A toute représentation V de G, on associe la fonction

$$\begin{aligned}\chi_V : G &\to \mathbf{C}\\ g &\mapsto \operatorname{Tr}(g),\end{aligned}$$

appelée son *caractère*.

C'est quelque chose d'assez naturel à introduire (voir par exemple la discussion [FH, § 2.1]), même si peut-être seulement restrospectivement. On peut penser dans un premier temps à ce que la trace nous dit sur un projecteur.

Un bon argument consiste à remarquer que la donnée de χ_V contient la donnée des polynômes caractéristiques [1] de tous les $\rho_V(g)$ [FH, Exercice 2.4] : travaillant pour simplifier relativement à une base de V, on peut fabriquer pour tout $k = 1, \ldots, n = \dim(V)$ une matrice $g^{\wedge k}$ constituée des mineurs de taille k de la matrice g ; la donnée de toute la fonction χ_V (et pas seulement sa valeur en g) permet de calculer la trace de ces matrices $g^{\wedge k}$ (par exemple, $\operatorname{Tr}(g^{\wedge 2}) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))$), qui est la somme des mineurs de taille k de g symétriques par rapport à la diagonale : ce scalaire est au signe près le coefficient de X^{k-1} dans le polynôme caractéristique de g.

(3.2) Exercice. Soit V la représentation de permutation associée à une action $G \circlearrowleft X$ sur un ensemble fini. Montrer que pour tout $g \in G$,

$$\chi_V(g) = \operatorname{Card}\big(\operatorname{Fix}(g)\big).$$

En déduire dans le cas particulier de la représentation régulière R_G, pour tout $g \in G$

$$\chi_{R_G}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

(3.3) Exercice. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

(3.4) Lemme. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Preuve. Puisque $g^n = 1$ ($n = |G|$), $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Donc d'une part $\chi(g) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(g)} \lambda$, et d'autre part pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(g)$, $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Ainsi,

$$\chi(g) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(g^{-1})} \lambda = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(g)} \frac{1}{\lambda} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(g)} \overline{\lambda} = \overline{\chi(g)}.$$

□

1. tiens, caractère–caractéristique...

(3.5) Proposition. *Le caractère de la représentation* Hom *est donné par :*

$$\chi_{\mathcal{L}(V,W)} = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W.$$

Preuve. On peut adopter la méthode des gros bourrins (c'est instructif), et appliquer le Lemme (3.5.1) ci-dessous. Il donne

$$\operatorname{Tr}\bigl(\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)\bigr) = \operatorname{Tr}\bigl(\rho_V(g)\bigr)\operatorname{Tr}\bigl(\rho_W(g)^{-1}\bigr) = \chi_V(g)\cdot\overline{\chi_W(g)},$$

où la dernière égalité provient du Lemme (3.4).

Sinon, g étant donné, on considère deux bases $(v_1,\dots,v_n)$ et $(w_1,\dots,w_m)$ diagonalisantes pour $\rho_V(g)$ et $\rho_W(g)$ respectivement, et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_m$ les valeurs propres correspondantes. La base $(\phi_i^j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ de $\mathcal{L}(V,W)$, telle que $\phi_{i_0}^{j_0}(v_i) = \delta_{ii_0}.w_{j_0}$, est diagonalisante pour $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)$, et les valeurs propres correspondantes sont $\lambda_i\mu_j^{-1}$. On en déduit comme dans la preuve du (3.4)

$$\chi_{\mathcal{L}(V,W)}(g) = \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j^{-1} = \bigl(\textstyle\sum_i \lambda_i\bigr)\bigl(\sum_j \overline{\mu_j}\bigr).$$

□

(3.5.1) Lemme. *Soit $a \in \mathcal{L}(V)$, $b \in \mathcal{L}(W)$. On considère l'endomorphisme C_a^b de $\mathcal{L}(V,W)$ défini par $\phi \mapsto b\phi a$. On a*

$$\operatorname{Tr}(C_a^b) = \operatorname{Tr}(a)\cdot\operatorname{Tr}(b).$$

Preuve. On munit V et W de bases $(v_1,\dots,v_n)$ et $(w_1,\dots,w_m)$ respectivement ; ceci induit une base $(\phi_i^j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ de $\mathcal{L}(V,W)$, telle que $\phi_{i_0}^{j_0}(v_i) = \delta_{ii_0}.w_{j_0}$. Il s'agit de calculer pour chaque i,j la coordonnée de $C_a^b(\phi_i^j)$ selon ϕ_i^j ; c'est la coordonnée de $C_a^b(\phi_i^j)(v_i) = b\phi_i^j a(v_i)$ selon w_j.

La matrice de $b\phi_i^j a$ dans les bases $(v_1,\dots,v_n)$ et $(w_1,\dots,w_m)$ est

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix} \times \begin{array}{cc} \begin{matrix} & i & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} & j \end{array} \times \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix} \times \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_{i1}B_j & \cdots & a_{in}B_j \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Le coefficient de $b\phi_i^j a$ selon ϕ_i^j est le coefficient sur la j-ème ligne de la i-ème colonne, $a_{ii}B_j$; c'est donc $a_{ii}b_{jj}$.

On conclut :

$$\operatorname{Tr}(C_a^b) = \sum_{i,j} a_{ii}b_{jj} = \bigl(\textstyle\sum_i a_{ii}\bigr)\bigl(\sum_j b_{jj}\bigr).$$

□

(3.5.2) Corollaire. Comme cas particulier, on obtient le caractère de la contragrédiente,

$$\chi_{V^{-1}} = \overline{\chi}_V.$$

3.2 – L'espace des fonctions centrales

(3.6) Pour toute représentation V, le caractère χ_V est une fonction qui est constante sur les classes de conjugaison de G (exercice !) ; on parle de *fonction centrale* ("class function").

Ceci équivaut à l'existence d'une fonction $\tilde{\chi}_V : G\backslash G \to \mathbf{C}$ qui rend le diagramme suivant commutatif,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\text{proj.}"'] \arrow[dr, "\chi_V"] & \\ G\backslash G \arrow[r, "\tilde{\chi}_V"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

($G\backslash G$ est le quotient de G sous l'action à gauche de G sur lui-même par conjugaison).

(3.7) Structure hermitienne sur $\mathcal{Z}_G$. On note $\mathcal{Z}_G$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions centrales sur G ; c'est un sev de $\mathbf{C}^G = \mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ de dimension $\mathrm{Card}(G\backslash G)$.

Le produit scalaire hermitien suivant sur $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ (exercice : c'en est bien un),

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}(G, \mathbf{C}), \quad (\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \cdot \psi(g),$$

induit une structure d'espace vectoriel hermitien sur $\mathcal{Z}_G$.

3.3 – Base orthonormée des fonctions centrales

(3.8) Théorème. *Les caractères des représentations irréductibles de G forment une base orthnormée de $\mathcal{Z}_G$.*

On va découper la preuve de ce théorème en plusieurs étapes.

(3.9) Formule de projection primaire. Soit V une représentation (pas nécessairement irréductible). On définit l'*opérateur de Reynolds*,

(3.9.1)
$$r_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

On vérifie que r_V est un projecteur G-linéaire sur V^G : 0) $r_V g = g r_V (= r_V)$ pour tout $g \in G$; i) $r_V \circ r_V = r_V$, ii) $r_V(x) = x$ pour tout $x \in V^G$, et iii) $r_V(x) \in V^G$ pour tout $x \in V$.
(De plus, r_V est G-linéaire. Exercice : puisque V^G est une composante isotypique de V, il existe un unique projecteur G-linéaire sur V^G, donné par la décomposition isotypique).

On en déduit la formule :

(3.9.2)
$$\dim(V^G) = \mathrm{Tr}(r_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

(3.10) Relations d'orthonormalité. Considérons à présent deux représentations V et W irréductibles. On a compris au (2.1) que les applications G-linéaires entre V et W sont les vecteurs de $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V,W)$ invariants pour la représentation sur $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V,W)$ induite par les représentations V et W :

$$\mathcal{L}_G(V,W) = \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V,W)^G$$

(y compris si V et W ne sont pas irréductibles).

Puisque V et W sont irréductibles, le Lemme de Schur nous dit que

$$\mathcal{L}_G(V,W) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } V \cong W \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit l'orthonormalité des caractères des représentations irréductibles :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{L}_G(V,W)\big) = \dim\big(\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V,W)^G\big) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathcal{L}(V,W)}(g) && \text{par (3.9.2)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\cdot \chi_W(g) && \text{par (3.5)} \\ &= (\chi_V, \chi_W) && \text{par définition} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } V\cong W \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \end{aligned}$$

(3.11) Lemme. *Soit V une représentation, et α une fonction à valeurs complexes sur G. Si α est une fonction centrale, alors l'application $\mathbf{C}$-linéaire*

$$\phi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G} \alpha(g).g$$

est G-linéaire.

Preuve. Si α est une fonction centrale, alors

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,V}(gx) &= \sum_{h\in G} \alpha(h).h(gx) \\ &= \sum_{h\in G} \alpha(ghg^{-1}).(ghg^{-1})(gx) && \text{changement de variable } h' = ghg^{-1} \\ &= g\sum_{h\in G}\alpha(h).hx = g\phi_{\alpha,V}(x) && \text{car } \alpha \text{ centrale.} \end{aligned}$$

□

(3.11.1) Exercice. Réciproquement, si $\phi_{\alpha,V}$ est G-linéaire pour toute représentation V, alors α est une fonction centrale. (Pour le démontrer, raisonner par contraposée : si α n'est pas centrale, trouver une représentation V telle que $\phi_{\alpha,V}$ n'est pas G-linéaire).

(3.12) Orthogonal des caractères. L'orthogonal dans $\mathcal{Z}_G$ de l'ensemble de tous les caractères est simplement l'orthogonal des caractères des représentations irréductibles, puisque $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

Soit $\alpha \in \mathcal{Z}_G$ orthogonale à tous les caractères. Soit V une représentation irréductible. Puisque $\phi_{\alpha,V}$ est G-linéaire (Lemme (3.11)), d'après le Lemme de Schur il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\phi_{\alpha,V} = \lambda.\mathrm{id}_V$. On calcule λ à l'aide du produit scalaire hermitien :

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\mathrm{Tr}(\phi_{\alpha,V})}{\dim(V)} &= \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g \in G} \alpha(g) \, \mathrm{Tr}(g) \\ &= \frac{|G|}{\dim(V)} (\overline{\chi_V}, \alpha) = \frac{|G|}{\dim(V)} (\chi_{V^\vee}, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Puisque toute représentation est somme directe d'irréductibles, on en déduit que si α centrale est orthogonale aux caractères, alors $\phi_{\alpha,V} = 0$ pour toute représentation V. Pour la représentation régulière R_G, ceci donne

$$\phi_{\alpha,R_G}(e_1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{g \in G} \alpha(g).e_g = 0 \;;$$

puisque $(e_g, g \in G)$ est une base de R_G (par construction), cette dernière relation est équivalente à l'annulation de tous les $\alpha(g)$, autrement dit à la nullité de α.

(3.13) Démonstration du Théorème (3.8). On a démontré au (3.10) que les caractères des représentations irréductibles forment une famille orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

D'après le (3.12), l'orthogonal dans $\mathcal{Z}_G$ de l'espace engendré par les caractères des représentations irréductibles est nul, donc ces caractères consituent une famille génératrice de $\mathcal{Z}_G$. □

3.4 – Applications

(3.14) *Un groupe possède un nombre fini de représentations irréductibles.* Plus précisément, il en possède $\mathrm{Card}(G \backslash G)$.

(3.15) *La décomposition isotypique d'une représentation est déterminée par son caractère.*

En effet, pour $V = \bigoplus V_i^{\oplus a_i}$,

$$\chi_V = \sum a_i \chi_i$$

et donc $a_i = (\chi_i, \chi_V)$. □

(3.15.1) Application : décomposition de la représentation régulière,

$$R_G = \bigoplus V_i^{\oplus \dim(V_i)}.$$

En effet, on a calculé au (3.2)

$$\chi_{R_G}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

On a donc

$$(\chi_i, \chi_{R_G}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \cdot \chi_{R_G}(g) = \overline{\chi_i(1)} = \dim(V_i).$$

□

(3.16) Formule de projection. Les projections selon la décomposition isotypique s'expriment en fonction des caractères. Pour V comme ci-dessus,

$$r_i = \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}.g$$

est la projection G-linéaire sur la i-ème composante isotypique $V_i^{\oplus a_i}$.

Preuve. Vu sa définition, l'application r_i laisse stable toute sous-représentation de V. Elle est donc "diagonale par blocs" relativement à n'importe quelle décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles.

L'application r_i est G-linéaire d'après le Lemme (3.11) puisque χ_i est une fonction centrale. Donc d'après le Lemme de Schur, chacun des "blocs diagonaux" précédents est une homothétie.

Calculons le rapport $\lambda \in \mathbf{C}$ correspondant à une sous-représentation irréductible isomorphe à V_j :

$$\lambda = \frac{\mathrm{Tr}\big(r_i|_{V_j}\big)}{\dim(V_j)} = \frac{\dim(V_i)}{\dim(V_j)} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \cdot \chi_j(g) = \frac{\dim(V_i)}{\dim(V_j)} (\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$$

(on considère $r_i|_{V_j}$ comme un endomorphisme de V_j). On en conclut que r_i est id sur la i-ème composante isotypique, et nulle sur les autres. □

(3.17) Lemme. *Une représentation V est irréductible si et seulement si $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Preuve. En effet, si $\chi_V = \sum a_i \chi_i$, alors

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{ij} a_i a_j (\chi_i, \chi_j) = \sum_i a_i^2.$$

□

(3.18) Retour sur les représentations de permutation. On considère une action $G \circlearrowright X$ sur un ensemble fini, et la représentation complexe $\mathbf{C}^X$ associée, voir (1.4).

(3.18.1) Commençons par retrouver l'existence d'une sous-représentation triviale (voir (2.3.2)) à l'aide des caractères. Il s'agit de calculer la dimension de la composante isotypique triviale $(\mathbf{C}^X)^G$. On le fait à l'aide de la formule de projection primaire (3.9), ou de manière équivalente à l'aide de (3.15) :

$$\dim\big((\mathbf{C}^X)^G\big) = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_{\mathbf{C}^X}(g).$$

On sait que $\chi_{\mathbf{C}^X}(g) = |\,\mathrm{Fix}(g)|$ (voir Exercice (3.2)) donc $\dim\big((\mathbf{C}^X)^G\big)$ est $\frac{1}{|G|}$ fois une somme d'entiers positifs. Parmi ceux-ci, il y a $\chi(1) = |X| > 0$, donc $\dim\big((\mathbf{C}^X)^G\big) > 0$ comme il fallait.

(3.18.2) D'après le théorème de Maschke, il existe une sous-représentation V_X de $\mathbf{C}^X$, supplémentaire de $\langle \mathbf{1} \rangle$. Attention, en générale $\langle \mathbf{1} \rangle$ est plus petite que la composante isotypique triviale de $\mathbf{C}^X$, et la représentation supplémentaire V_X n'est pas unique ; en revanche, deux supplémentaires donnent toujours deux représentations isomorphes. Le caractère de V_X est donné par la formule

(3.18.3) $$\chi_{V_X}(g) = |\,\mathrm{Fix}(g)| - 1.$$

C'est une conséquence de la formule $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ (voir Exercice (3.3)), qui donne $\chi_{\mathbf{C}^X} = \chi_{V_X} + \chi_{\mathrm{triv}}$, et de (3.2) qui donne $\chi_{\mathbf{C}^X}$. Le fait que χ_{V_X} soit uniquement déterminé redémontre le fait que deux supplémentaires de $\langle \mathbf{1} \rangle$ donnent deux représentations isomorphes.

(3.18.4) Proposition. *Si l'action $G \circlearrowleft X$ est doublement transitive, alors V_X est irréductible.*

Preuve. On va appliquer le critère (3.17). On calcule donc

$$(\chi_{V_X}, \chi_{V_X}) = \frac{1}{|G|} \sum_g |\chi_{V_X}(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_g \big(|\operatorname{Fix}(g)| - 1 \big)^2. \tag{3.18.5}$$

On va ensuite utiliser deux fois la formule de Burnside

$$\big| G \backslash X \big| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}_x| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|$$

pour exploiter les propriétés de transitivité de $G \circlearrowleft X$: i) $G \circlearrowleft X$ est transitive, donc X a une seule orbite sous l'action de G, et ii) $G \circlearrowleft X$ est doublement transitive, donc $X \times X$ a seulement deux orbites sous l'action diagonale de G, la diagonale et son complémentaire. Dans le cas i), la formule de Burnside nous dit ainsi

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}_{G \circlearrowleft X}(g)| = 1,$$

et dans le cas ii) elle nous dit complémentaire. Dans le cas i), la formule de Burnside nous dit ainsi

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}_{G \circlearrowleft X \times X}(g)| = 2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}_{G \circlearrowleft X}(g)|^2.$$

On peut alors calculer le membre de droite de (3.18.5),

$$\frac{1}{|G|} \sum_g |\operatorname{Fix}(g)|^2 - 2 \cdot \frac{1}{|G|} \sum_g |\operatorname{Fix}(g)| + 1 = 2 - 2 + 1 = 1.$$

□

4 – Tables de caractères

4.1 – Formulaire

Je rassemble ici des résultats qui s'avèrent utiles pour déterminer la table de caractères d'un groupe donné. On considère la liste complète $V_1, \ldots, V_r$ des représentations irréductibles de G ($r = |G \backslash G|$).

(4.1) $\sum_i \dim(V_i)^2 = |G|$.

C'est une conséquence de la décomposition de la représentation régulière (3.15.1) :

$$\dim(R_G) = \sum \dim(V_i)^2 = |G|.$$

□

(4.1.1) Exercice. Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.

(4.2)

$$\forall g \in G, \qquad \sum_i \dim(V_i) \cdot \chi_i(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

C'est à nouveau une conséquence de la décomposition de la représentation régulière (3.15.1), et d'ailleurs ça généralise (4.1) (faire $g = 1$) :

$$\chi_{R_G}(g) = \sum \dim(V_i) \cdot \chi_i(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

□

(4.3) Renversement des relations d'orthogonalité.

(4.3.1) $$\forall g, h \in G, \qquad \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi_V(h)} \cdot \chi_V(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \not\sim h \\ \frac{|G|}{|C(g)|} & \text{si } g \sim h \end{cases}$$

où $C(g)$ désigne la classe de conjugaison de g ; son cardinal divise $|G|$, puisque c'est le cardinal d'une orbite sous une action de groupe.
(Ça généralise (4.1), faire $h = 1$, mais cette fois l'argument est différent).

(4.3.2) Commentaire. Par définition, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonale si

$$^{\mathsf{T}}AA = \begin{pmatrix} ^{\mathsf{T}}C_1 \\ \hline \vdots \\ \hline ^{\mathsf{T}}C_n \end{pmatrix} \times \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right) = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j : {}^{\mathsf{T}}C_i C_j = \delta_{ij},$$

autrement dit si les colonnes de A sont orthogonales. On sait depuis qu'on est tout petit que cette condition est équivalente à l'orthogonalité des lignes, mais ce n'est pas du tout évident (au même titre que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^{\mathsf{T}}A)$, quelque part).

Une façon simple de le démontrer est d'écrire :

(4.3.3) $$^{\mathsf{T}}A \times A = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = {}^{\mathsf{T}}A \quad \Leftrightarrow \quad A \times {}^{\mathsf{T}}A = \mathrm{Id},$$

cette dernière condition étant l'orthogonalité des lignes. Mais il faut être bien conscient que l'équivalence « $^{\mathsf{T}}AA = \mathrm{Id} \Leftrightarrow A^{\mathsf{T}}A = \mathrm{Id}$ » n'a rien de trivial.

Exercice. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence

$$AB = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad BA = \mathrm{Id}.$$

(4.3.4) Preuve de (4.3.1). Notons $C_1, \ldots, C_r$ les classes de conjugaison de G. L'espace vectoriel des fonctions centrales $\mathcal{Z}_G$ est muni de la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ des fonctions de Dirac $\delta_1, \ldots, \delta_r$ de $C_1, \ldots, C_r$ ($r = \mathrm{Card}(G \backslash G)$) :

$$\delta_i(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice du produit scalaire hermitien sur $\mathcal{Z}_G$ dans $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ est

$$\Delta = \frac{1}{|G|}\begin{pmatrix} |C_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |C_r| \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ dans $\mathcal{B}_\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$ (base orthonormée des caractères des représentations irréductibles) est

$$\mathrm{X} = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}_{\mathrm{can}}, \mathcal{B}_\chi) = \begin{pmatrix} \chi_1(C_1) & \cdots & \chi_r(C_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_1(C_r) & \cdots & \chi_r(C_r) \end{pmatrix}$$

(en s'autorisant l'abus de notation $\chi(C) = \tilde{\chi}(C)$, *cf.* (3.6)). L'orthogonalité des caractères des représentations irréductibles s'écrit donc

(4.3.5) $$^{\mathsf{T}}\mathrm{X}\Delta\mathrm{X} = \mathrm{Id}.$$

Raisonnant comme en (4.3.3) il vient

$$^{\mathsf{T}}\mathrm{X}\Delta\mathrm{X} = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{X}\,^{\mathsf{T}}\mathrm{X} = \Delta^{-1},$$

qui contient toutes les relations voulues. □

(4.3.6) Preuve, variante [OD, Corollaire IV.2.6]. On conserve les notations précédentes. Puisque $\mathcal{B}_\chi$ est orthonormée, on calcule facilement la matrice de passage de $\mathcal{B}_\chi$ dans $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{r} (\chi_j, \delta_i).\chi_j = \frac{|C_i|}{|G|}\chi_i(C_i).\chi_i.$$

Ce sont les relations voulues ! □

(4.4) Synthèse. On note $C_1, \ldots, C_r$ les classes de conjugaison de G, $c_1, \ldots, c_r$ leurs cardinaux respectifs. On convient que $C_1 = \{1\}$, et ainsi $c_1 = 1$.

$\lvert G\rvert$ G	1 $\{1\}$	c_2 C_2	$\ldots$ $\ldots$	c_r C_r
$\mathbf{1}$	1	1	$\ldots$	1
χ_V	$\dim(V)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(4.4.1) Les lignes sont orthogonales,

$$\forall \chi, \chi' \quad \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)}\chi'(g) = \sum_i c_i \overline{\chi(C_i)}\chi'(C_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \chi' \\ |G| & \text{si } \chi = \chi' \end{cases}$$

(c'est l'orthonormalité des caractères pour le produit scalaire hermitien sur $\mathcal{Z}_G$, Théorème (3.8)).

(4.4.2) Les colonnes sont orthogonales,

$$\forall i, j, \qquad \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi_V(C_i)} \cdot \chi_V(C_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{|G|}{c_i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

(d'après (4.3)).
(4.4.3) On connaît la somme des lignes pondérées par la dimension,

$$\sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V) \cdot \big(\chi_V(C_1), \ldots, \chi_V(C_r)\big) = \big(|G|, 0, \ldots, 0\big)$$

(c'est (4.4.2) avec $C_i = \{1\}$, mais il s'agit d'un cas particulièrement remarquable).

4.2 – Applications

(4.5) Lemme. *Soit V une représentation de G. Pour tout $g \in G$,*

$$|\chi_V(g)| = \chi_V(1) = \dim(V)$$

si et seulement si $\rho_V(g)$ est une homothétie, de rapport $\chi_V(g)/\chi_V(1)$. En particulier, $\rho_V(g) = \mathrm{id}$ si et seulement si $\chi_V(g) = \chi_V(1)$.

Preuve. Si n est l'ordre de $|G|$, $\rho_V(g)^n = \mathrm{id}$ donc g est diagonalisable, et ses valeurs propres sont des racines n-èmes de l'unité. On conclut avec l'inégalité triangulaire. ☐

(4.6) Sous-groupes distingués. Un sous-groupe distingué de G est réunion de classes de conjugaison (c'est essentiellement la définition de sous-groupe distingué).

Pour chaque caractère χ, la réunion des C_i sur lesquelles χ prend la valeur $\chi(1)$ est un sous-groupe distingué $K_\chi \trianglelefteq G$: c'est le noyau de la représentation correspondante d'après le Lemme (4.5).

(4.6.1) Tout sous-groupe distingué $K \trianglelefteq G$ est intersection de noyaux K_χ de représentations irréductibles.

Preuve. Considérons $\pi : G \to G/K$ la projection canonique, et $R : G/K \to \mathrm{GL}(\mathbf{C}^{G/K})$ la représentation régulière du quotient. Cette dernière, comme toute représentation régulière, est fidèle (*i.e.*, R est un morphisme injectif), donc $K = \ker(R \circ \pi)$. On obtient ce noyau comme intersection de noyaux K_χ en décomposant la représentation $R \circ \pi$ de G en somme de représentations irréductibles. ☐

(4.6.2) Corollaire. *G est simple si et seulement si pour tout $V \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{V_{\mathrm{triv}}\}$, $K_{\chi_V} = \{1\}$.*

(4.7) Sous-groupe dérivé. Les représentations de dimension 1 sont des morphismes

$$G \to \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^*,$$

donc elles se factorisent par le quotient $G \to G/D(G) = G^{\mathrm{ab}}$ puisque $\mathbf{C}^*$ est abélien (c'est la propriété universelle du quotient, vers §5.2).

Ainsi en pratique, si on connaît $D(G)$ à l'avance, on obtient facilement toutes les représentations de degré 1. Sinon, une fois qu'on aura établi la table des caractères de G, on pourra déterminer $D(G)$ en vertu de l'énoncé suivant.

(4.7.1) Le sous-groupe dérivé $D(G)$ est l'intersection des noyaux K_χ des représentations de dimension 1 :

$$D(G) = \bigcap_{\chi \in \hat{G}} \ker(\chi).$$

Preuve. Le sous-groupe dérivé est le noyau de la représentation $\pi \circ R^{\mathrm{ab}}$ de G, où $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ est la projection, et R^{ab} la représentation régulière de l'abélianisé de G. On conclut comme en (4.6.1), une fois qu'on a noté que toute sous-représentation irréductible de $\pi \circ R^{\mathrm{ab}}$ est de dimension 1 puisque G^{ab} est abélien. □

(4.8) Centre. *Le centre de G*

$$Z(G) = \{g \in G : \ \forall h \in G, \ gh = hg\}$$

est la réunion de toutes les classes de conjugaison C pour lesquelles

$$\forall V \in \mathrm{Irr}(G), \quad |\chi_V(C)| = \chi_V(1) = \dim(V).$$

Preuve. Commençons par dire une fois pour toutes que la condition $|\chi_V(C)| = \chi_V(1)$ nous sert sous sa forme équivalente (*cf.* Lemme (4.5)) : pour tout $g \in C$, $\rho_V(g)$ est une homothétie.

Si g appartient au centre $Z(G)$, alors pour toute représentation ρ, $\rho(g)$ est G-linéaire (exercice automatique). Dans le cas d'une représentation irréductible ρ_i, on obtient par le Lemme de Schur que $\rho_i(g)$ est une homothétie. Ceci prouve une première implication.

Réciproquement, si $\rho_i(g)$ est une homothétie pour toute représentation irréductible, alors $\rho_i(g)$ commute à tous les $\rho_i(h)$, $h \in G$, autrement dit

$$gh = hg \quad \text{dans } \mathrm{GL}(V_i).$$

Ceci implique que $gh = hg$ dans $\mathrm{GL}(V)$ pour toute représentation V (mais attention, $\rho_V(g)$ n'est pas nécessairement une homothétie). En particulier, on a

$$R_G(gh) = R_G(hg),$$

où R_G est la représentation régulière de G, et donc $gh = hg$ puisque cette représentation est fidèle. □

4.3 – Exemples

(4.9) Groupes abéliens. Si G est un groupe abélien, il a $|G|$ classes de conjugaison, et $|G|$ représentations irréductibles, toutes de dimension 1. Par le théorème de structure des groupes abéliens finis, il suffit essentiellement de comprendre le cas d'un groupe cyclique. Voir §5 pour une étude plus systématique. Noter que le cas des groupes abéliens donne toutes les représentations de degré 1 (nécessairement irréductibles) d'un groupe quelconque, dès lors qu'on connaît son abélianisé (voir (4.7) ci-dessus).

Une représentation du groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est entièrement déterminée par l'image d'un générateur. Dans le cas d'une représentation de degré 1, cette image est la donnée d'une racine n-ième de l'unité. On obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (on note ω sa racine primitive n-ième de l'unité préférée).

n	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\cdots$	$\{i\}$	$\cdots$	$\{n-1\}$
$\mathbf{1}$	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\boldsymbol{\omega}$	1	ω	$\cdots$	ω^i	$\cdots$	ω^{n-1}
$\vdots$						
$\boldsymbol{\omega}^{\otimes(n-1)}$	1	ω^{n-1}	$\cdots$	$\omega^{i(n-1)}$	$\cdots$	$\omega^{(n-1)(n-1)}$

(4.9.1) Exercice. Vérifier l'orthonormalité des lignes et des colonnes de cette table de caractères.
(4.9.2) Exercice. Déterminer la table des caractères du groupe de Klein $V_4 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(4.10) Petits groupes symétriques et alternés.
(4.10.1) $\mathfrak{S}_3$. Trois classes de conjugaison, et trois représentations irréductibles. On trouve tout de suite la triviale et la signature, il reste une représentation mystère de degré 2 ; celle-ci n'est pas si mystérieuse, puisque c'est le quotient de la représentation standard $\mathbf{C}^3$ donnée par $\mathfrak{S}_3 \circlearrowleft [3]$ par la triviale.

6	1	3	2
$\mathfrak{S}_3$	$\{1\}$	$(**)$	$(***)$
$\mathbf{1}$	1	1	1
$\boldsymbol{\varepsilon}$	1	-1	1
$V_{[3]}$	2	0	-1

À toutes fins utiles, je rappelle la résolution

$$\{1\} \overset{3}{\trianglelefteqslant} \underbrace{\mathfrak{A}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}_{=\langle(123)\rangle} \overset{2}{\trianglelefteqslant} \mathfrak{S}_3.$$

(4.10.2) $\mathfrak{S}_4$. Cinq classes de conjugaison, et cinq représentations irréductibles. On a la triviale et la signature, la standard donnée par l'action tautologique $\mathfrak{S}_4 \circlearrowleft [4]$ fournit une représentation irréductible $V_{[4]}$ de degré 3. On en obtient une quatrième en la personne de $V_{[4]} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$, il manque une représentation mystère de degré 2.

Ils expliquent dans [FH, §2.3] comment découvrir la représentation mystère à partir de son caractère, qu'on peut calculer à partir des quatre autres grâce à (4.4.3). Cette représentation provient du morphisme $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ qu'on peut comprendre de plusieurs manières : a) de manière algébrique, $\mathfrak{S}_3$ est le quotient de $\mathfrak{S}_4$ par le sous-groupe distingué V_4 des doubles-transpositions (voir ci-dessous) ; b) de manière géométrique, $\mathfrak{S}_4$ est le groupe des isométries directes du cube, donc agit sur les paires de faces opposées, qui sont trois.

24	1	6	8	6	3
$\mathfrak{S}_4$	$\{1\}$	$(**)$	$(***)$	$(****)$	$(**)(**)$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\varepsilon}$	1	-1	1	-1	1
$V_{[4]}$	3	1	0	-1	-1
$V_{[4]} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$	3	-1	0	1	-1
$\mathfrak{S}_3$	2	0	-1	0	2

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède deux sous-groupes distingués, $\mathfrak{A}_4$ et le sous-groupe des doubles transpositions, isomorphe à V_4. On a la suite de sous-groupes distingués les uns dans les autres

$$\{1\} \overset{2}{\trianglelefteqslant} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \langle\tau\rangle \overset{2}{\trianglelefteqslant} V_4 \overset{3}{\trianglelefteqslant} \mathfrak{A}_4 \overset{2}{\trianglelefteqslant} \mathfrak{S}_4.$$

La représentation $V_{[4]} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à la réalisation $\mathfrak{S}_4 < \mathrm{SO}(3)$ comme groupe des isométries directes du cube. On a alors la description suivante des classes de conjugaison :
— $(**)$: rotations d'angle π autour des grandes diagonales, trace -1 ;
— $(***)$: rotations d'angle $2\pi/3$ autour des moyennes diagonales (joignent les milieux de deux arêtes opposées), trace $1 + 2\cos(2\pi/3) = 0$;
— $(****)$: rotations d'angle $\pi/2$ autour des axes (joignent les isobarycentres de deux faces opposées), trace 1 ;
— $(**)(**)$: rotations d'angle π autour des axes (les doubles-transpositions sont les carrés des 4-cycles), trace -1.

(4.10.3) $\mathfrak{A}_4$. On trouve quatre classes de conjugaison, telles qu'indiquées ci-dessous (la classe des 3-cycles dans $\mathfrak{S}_4$ se scinde en deux classes).

12	1	4	4	3
$\mathfrak{A}_4$	$\{1\}$	(123)	(132)	$(**)(**)$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
a_1	1	j	j^2	1
a_2	1	j^2	j	1
$V_{[4]}$	3	0	0	-1

Le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$ est le V_4 des doubles-transpositions, et $(\mathfrak{A}_4)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; on a donc trois représentations de degré 1, comme indiqué dans la table ci-dessus, et il manque une représentation mystère de degré 3.

On calcule son caractère à partir des autres, et on constate que la représentation mystère est la restriction de la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$; tout aussi bien, c'est le quotient par la triviale de la représentation donnée par $\mathfrak{A}_4 \circlearrowleft [4]$ tautologique.

(4.11) Groupe diédral D_4**.** Il y a 5 classes de conjugaison :
— $srs = r^{-1}$, donc $r_{\pi/4}$ et $r_{-\pi/4}$ sont conjuguées ;
— $r_\alpha s_\gamma r_\alpha^{-1} = s_{\gamma+\alpha}$ donc (i) s_0 et $s_{\pi/2}$ sont conjuguées, et (ii) $s_{\pi/4}$ et $s_{3\pi/4}$ sont conjuguées ;
— $ss_\Delta s^{-1} = s_{s(\Delta)}$, donc $s_{\pi/4}$ et $s_{3\pi/4}$ sont conjuguées, et s_0 et $s_{\pi/2}$ sont conjuguées ; dans les deux cas on le savait déjà.

Les 5 classes de conjugaison sont donc :

$$\{1\}, \quad \{-1 = r_\pi\}, \quad \{r_{\pi/4}, r_{-\pi/4}\}, \quad \{s_0, s_{\pi/2}\}, \quad \{s_{\pi/4}, s_{3\pi/4}\}.$$

Pour calculer $r^k s$, on note qu'en général $r_\alpha = s_{\alpha/2} s$ $(s = s_0)$, donc

$$r^k s = r_{k\pi/2} s_0 = s_{k\pi/4} s_0 s_0 = s_{k\pi/4}.$$

Les 5 classes de conjugaison peuvent donc aussi être décrites, dans le même ordre que ci-dessus, comme :

$$\{1\}, \quad \{r^2\}, \quad \{r, r^3\}, \quad \{s, r^2 s\}, \quad \{rs, r^3 s\}.$$

Le sous-groupe dérivé est $D(\mathrm{D}_4) = \{\pm 1\} = \{1, r^2\}$, le quotient correspondant est le groupe de Klein $\mathrm{V}_4 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a donc 4 représentations irréductibles de degré 1, la cinquième est de degré 2 et coïncide avec la représentation standard.

8	1	1	2	2	2
D_4	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{r, -r\}$	$\{s, -s\}$	$\{rs, -rs\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
a_1	1	1	-1	1	-1
a_2	1	1	1	-1	-1
a_3	1	1	-1	-1	1
standard	2	-2	0	0	0

Le caractère de la représentation standard se calcule en l'interprétant comme une trace, on connaît la trace des différentes isométries du carré.

(4.12) Groupe $\mathbf{H}_8$. Il a la même table de caractères que D_4 mais ne lui est pas isomorphe. C'est le groupe $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Du fait que $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SO}(3)$, on déduit que $\mathbf{H}_8/\{\pm 1\}$ est le groupe des retournements autour des trois axes de l'espace, qui n'est autre que le groupe abélien des matrices

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}, \ \det = 1,$$

isomorphe à V_4. On a ainsi une représentation de degré 3 de $\mathbf{H}_8$, somme directe de trois représentations irréductibles et deux à deux distinctes de degré 1.

Il y a une cinquième représentation irréductible, de degré 2. C'est la représentation standard (dite *spin*) provenant de la réalisation naturelle de $\mathbf{H}_8$ comme sous-groupe de

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \ \det = |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

avec

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cette représentation, le calcul du caractère en termes de traces est immédiat.

8	1	1	2	2	2
$\mathbf{H}_8$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
a_1	1	1	-1	1	-1
a_2	1	1	1	-1	-1
a_3	1	1	-1	-1	1
standard	2	-2	0	0	0

(4.13) Groupes symétriques et alternés un peu plus gros ($\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$).

(4.13.1) $\mathfrak{S}_5$ (voir [FH, §3.1] ou [OD, p. 142]). Pas grand chose à en dire au niveau de ces notes, puisqu'il semble admis que la bonne stratégie est d'utiliser de l'algèbre tensorielle.

On cherche 7 représentations irréductibles. On a $\mathbf{1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$, la standard V de degré 4, et $V \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$. On vérifie que $\wedge^2 V$ est irréductible de degré 6 (on calcule son caractère avec $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}\big(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\big)$, et on vérifie qu'il est de module 1. Ainsi, il en manque deux de degré 5, conjuguées l'une à l'autre par $\boldsymbol{\varepsilon}$; on arrive à déterminer leurs caractères en bricolant. On les note W' et W''.

(4.13.2) $\mathfrak{A}_5$. Ce cas recèle un peu plus de géométrie, puisque $\mathfrak{A}_5$ est le groupe des isométries directes du dodécaèdre/icosaèdre.

Outre la triviale et la standard V de degré 4, on a donc une représentation Y de degré 3 donnée par l'inclusion $\mathfrak{A}_5 < \mathrm{SO}(3)$, dont on calcule le caractère en termes de traces de rotations de $\mathbf{R}^3$.

60	1	20	15	12	12
$\mathfrak{A}_5$	$\{1\}$	$(***)$	$(**)(**)$	(12345)	(21345)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
Y	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Z	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
W	5	-1	1	0	0

— les 3-cycles sont des rotations d'angle $2\pi/3$, de trace $1+2\cos(2\pi/3)=0$;
— les doubles-transpositions sont des retournements, de trace -1 ;
— les 5-cycles sont des rotations d'angle $\pm 2\pi/5$ ou $\pm 4\pi/5$, de trace $(1+\sqrt{5})/2$ ou $(1+\sqrt{5})/2$ (voir ci-dessous).

On voit qu'en fait il y a deux façons de réaliser $\mathfrak{A}_5$ comme groupe d'isométries du dodécaèdre/icosaèdre, différant de l'automorphisme extérieur donné par la conjugaison par une transposition dans $\mathfrak{S}_5$: l'une envoie les conjugués de (12345) sur des rotations d'angle $\pm 2\pi/5$, l'autre sur des rotations d'angle $\pm 4\pi/5$.

Il manque une dernière représentation irréductible, de degré 5. On peut calculer son caractère à partir des autres, et on constate qu'elle est issue indifféremment de l'une ou l'autre des deux représentations irréductibles de degré 5 W' et W'' du groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$.

(4.13.3) Exercice. Utiliser la table des caractères de $\mathfrak{A}_5$ pour démontrer que ce groupe est simple.

(4.13.4) Cosinus de $2\pi/5$ et $4\pi/5$. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$. On sait que c'est une racine de

$$1+X+X^2+X^3+X^4.$$

On sait en fait beaucoup plus, puisque les racines de ce polynôme sont ω et $\overline{\omega}$, et ω^2 et $\overline{\omega}^2$. Donc il se factorise en

$$\big(X^2-2\cos(\tfrac{2\pi}{5})X+1\big)\cdot\big(X^2-2\cos(\tfrac{4\pi}{5})X+1\big).$$

On en déduit les deux identités

$$\left\{\begin{aligned} -2\big(\cos(\tfrac{2\pi}{5})+\cos(\tfrac{4\pi}{5})\big) &= 1 \\ -4\cos(\tfrac{2\pi}{5})\cdot\cos(\tfrac{4\pi}{5}) &= 1. \end{aligned}\right. \tag{4.13.5}$$

Ainsi $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ sont les deux racines du polynôme

$$X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4},$$

soit

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

respectivement.

On déduit des identités (4.13.5) le fait géométrique suivant, qui donne une méthode de construction à la règle et au compas du pentagone régulier. On considère les points $M = \big(\cos(2\pi/5),0\big)$ et $N=\big(\cos(4\pi/5),0\big)$, $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[MN]$, $I=(0,\alpha)$ et $J=(0,-\alpha)$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées. La première relation nous dit que le centre de $\mathcal{C}$ est le point $(-1/4,0)$. On va utiliser la seconde pour calculer α. On écrit trois relations de Pythagore

$$\left\{\begin{aligned} MI^2 &= \cos^2(\frac{2\pi}{5})+\alpha^2 \\ NI^2 &= \cos^2(\frac{4\pi}{5})+\alpha^2 \\ MN^2 &= MI^2+NI^2, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$MN^2 = \big(\cos(\tfrac{2\pi}{5})-\cos(\tfrac{4\pi}{5})\big)^2 = \cos^2(\tfrac{2\pi}{5})+\cos^2(\tfrac{4\pi}{5})+2\alpha^2,$$

puis finalement $\alpha=\pm 1/2$ avec la seconde relation.

La construction s'effectue donc ainsi : on trace $\mathcal{C}$ comme le cercle de centre $(-1/4,0)$ passant par $(0,\pm 1/2)$; ses points d'intersection avec l'axe des abscisses sont M et N, d'où l'on déduit les sommets du pentagone en traçant des verticales par M et N et en intersectant avec le cercle unité.

5 – Dualité

5.1 – Généralités

(5.1) Définition. On appelle groupe dual d'un groupe G le groupe

$$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$$

(morphismes de groupes évidemment).

Comme ensemble, $\hat{G}$ est l'ensemble des représentations de G de dimension 1 (nécessairement irréductibles !). On le munit de la structure de groupe définie par

$$\forall \chi, \chi' \in \hat{G} \qquad \chi\chi' = \big(g \in G \mapsto \chi(g)\chi(g') \in \mathbf{C}^*\big).$$

(5.2) Remarque. Si G est abélien fini, alors $\hat{G} = \mathrm{Irr}(G)$ (ensemble de toutes les représentations irréductibles complexes et de dimension finie).

(5.3) Lemme. *On a les propriétés suivantes :*
(5.3.1) $\hat{G} = \widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ *;*
(5.3.2) $\widehat{G_1 \times G_2} \cong \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.

Pour le (5.3.1), voir (4.7) plus haut. Je laisse le (5.3.2) en exercice (facile).

(5.4) Proposition. *Soit G groupe abélien fini.*
(5.4.1) G et $\hat{G}$ ont le même ordre.
(5.4.2) G et $\hat{\hat{G}}$ sont canoniquement isomorphes.

Preuve. Comme on l'a remarqué en (5.2), sous les hypothèses de la Proposition $\hat{G}$ s'identifie à l'ensemble des représentations irréductibles de G ; celles-ci sont au nombre de $|G|$ lorsque G est abélien (c'est le nombre de classes de conjugaison). Ceci prouve le premier point.

Pour le second point, on considère le morphisme d'évaluation

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} : G &\to \hat{\hat{G}} \\ g &\mapsto \big(\chi \in \hat{G} \mapsto \chi(g) \in \mathbf{C}^*\big), \end{aligned}$$

comme d'habitude pour la bidualité. C'est un morphisme de groupes ; on va montrer qu'il est injectif, et ce sera suffisant puisque G et son bidual ont le même ordre d'après le premier point (appliqué deux fois de suite).

Soit $g \in \ker(\mathrm{ev})$. On a $\chi(g) = 1$ pour toute représentation irréductible de G (toujours la Remarque (5.2)), donc g est dans le noyau de toutes les représentations irréductibles. L'intersection de tous ces noyaux est toujours triviale (c'est le noyau de la représentation régulière, qui est fidèle), donc $g = 1$. □

(5.5) Exercice. Montrer que

$$\widehat{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \simeq \boldsymbol{\mu}_n$$

(groupe des racines n-èmes de l'unité). Cet isomorphisme n'est pas du tout canonique.

(5.6) Théorème. *Si G est un groupe abélien fini, G et $\hat{G}$ sont isomorphes, non canoniquement.*

C'est une conséquence de (5.5) et (5.3.2) si on connaît le théorème de structure des groupes abéliens finis.

5.2 – Propriété universelle de l'abélianisé

On rappelle la propriété universelle du quotient par un sous-groupe distingué, et on l'applique au cas du sous-groupe dérivé.

(5.7) Proposition. *Soit G un groupe, et $K \trianglelefteq G$ un sous-groupe* distingué*, de sorte que le quotient G/K est muni d'une structure de groupe. On considère un autre groupe H. Les morphismes de groupes $G/K \to H$ sont en correspondance bi-univoque avec les morphismes de groupes $G \to H$ qui sont triviaux sur K.*

(5.8) Propriété universelle de l'abélianisé. Soit G un groupe. Le *sous-groupe dérivé* de G est

$$D(G) = \langle aba^{-1}b^{-1},\ a, b \in G\rangle.$$

C'est un sous-groupe distingué de G, et le groupe quotient $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$ est abélien.
(5.8.1) Soit M un groupe abélien, $\phi : G \to M$ un morphisme de groupes. Il existe un unique morphisme $\bar{\phi} : G^{\mathrm{ab}} \to M$ tel que $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, où π est le morphisme canonique $G \to G^{\mathrm{ab}}$.

6 – Analyse de Fourier

6.1 – Transformation de Fourier

(6.1) L'algèbre $\mathbf{C}[G]$. On définit un $\mathbf{C}$-ev $\mathbf{C}[G]$ en considérant le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par G, que l'on tensorise par $\mathbf{C}$ au dessus de $\mathbf{Z}$. On munit ce $\mathbf{C}$-ev d'une structure de $\mathbf{C}$-algèbre en étendant par distributivité la loi de groupe de G.

En tant que $\mathbf{C}$-ev, $\mathbf{C}[G]$ est l'espace $\mathbf{C}^G$ des fonctions sur G à valeurs dans $\mathbf{C}$ que l'on a déjà considéré pour la représentation régulière. La structure d'algèbre décrite ci-dessus correspond dans cette description au produit de convolution :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbf{C}^G \qquad \varphi * \psi = \big(g \mapsto \sum_{h\in G} \varphi(h)\psi(h^{-1}g)\big).$$

En effet, on constate que ce produit donne ce qu'il faut sur la base des fonctions de Dirac :

$$\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}.$$

(6.2) Transformée de Fourier relative. C'est la transformée de Fourier relativement à une représentation de G donnée. Étant donné une telle représentation V, on définit :

$$\forall f \in \mathbf{C}[G] \qquad \hat{f}_V = \sum_{g\in G} f(g)g \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V).$$

C'est le $\phi_{f,V}$ du Lemme (3.11) ; si f est centrale, alors $\hat{f}_V$ est G-linéaire, mais $\hat{f}_V$ n'est en général pas G-linéaire.

La transformée de Fourier relative à V étend la représentation de groupe $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ en une représentation de $\mathbf{C}$-algèbre $\rho : \mathbf{C}[G] \to \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V)$. Ceci peut s'écrire de la manière suivante : on pose $(\widehat{\delta_g})_V = g$, puis on étend par $\mathbf{C}$-linéarité.

(6.2.1) Lemme. *La transformée de Fourier relative est un morphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres :*

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbf{C}[G] \qquad \widehat{\varphi * \psi}_V = \hat{\varphi}_V \circ \hat{\psi}_V.$$

(6.3) Théorème. *La* transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : \big(\mathbf{C}[G], *\big) \longrightarrow \Big(\bigoplus\nolimits_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \big(\mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V), \circ\big)\Big)$$
$$f \longmapsto \big(\hat{f}_V, V \in \mathrm{Irr}(G)\big)$$

réalise un isomorphisme de $\mathbf{C}$*-algèbres.*

Preuve. On a bien un morphisme d'algèbres, puisque les transformations de Fourier relatives en sont, Lemme (6.2.1). Ensuite, il suffit d'établir la *formule d'inversion de Fourier* :

(6.3.1)
$$\forall \varphi \in \mathbf{C}[G] \;\; \forall g \in G \qquad \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V) \cdot \mathrm{Tr}\big(\rho_V(g^{-1}) \circ \hat{\varphi}_V\big).$$

Par définition de la transformée de Fourier relativement à V,

$$\rho_V(g^{-1}) \circ \hat{\varphi}_V = g^{-1} \sum_{h \in G} \varphi(h) h = \sum_{h \in G} \varphi(h) g^{-1} h \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}(V),$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V) \cdot \mathrm{Tr}\big(\rho_V(g^{-1}) \circ \hat{\varphi}_V\big) &= \sum_V \sum_h \dim(V) \varphi(h) \,\mathrm{Tr}\big(\rho_V(g^{-1}h)\big) \\ &= \sum_h \varphi(h) \sum_V \dim(V) \cdot \chi_V(g^{-1}h) \\ &= \sum_h \varphi(h) \chi_{R_G}(g^{-1}h) = |G| \varphi(g),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du calcul de χ_{R_G}, (3.2). □

(6.3.2) Remarque. En comparant les dimensions de ces deux algèbres isomorphes, on retrouve l'identité

$$|G| = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V).$$

(6.3.3) Corollaire. On a la *formule de Plancherel* :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbf{C}[G] \qquad \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V) \cdot \mathrm{Tr}\big(\hat{\varphi}_V \circ \hat{\psi}_V\big).$$

Elle s'obtient en remarquant que le membre de gauche est $\varphi * \psi(1)$, puis en calculant cette quantité avec la formule d'inversion de Fourier (6.3.1). □

6.2 – Sous-algèbre des fonctions centrales

(6.4) Proposition. *Le centre de* $\mathbf{C}[G]$ *est la sous-algèbre des fonctions centrales,*

$$Z\big(\mathbf{C}[G], *\big) = \mathbf{C}[G]^G$$

(les invariants ici correspondent à l'action de G *sur* $\mathbf{C}[G]$ *par conjugaison,* $g.\varphi(h) = \varphi(g^{-1}hg)$*, qui est bien une action à gauche).*

Preuve. Avant de commencer, notons que le centre de $\mathbf{C}[G]$ est bien une sous-algèbre car le produit de convolution est associatif (double exercice).

Considérons φ fonction centrale, et ψ fonction quelconque. On a pour tout $g \in G$:

$$\varphi * \psi(g) = \sum_{h\in G} \varphi(h)\psi(h^{-1}g) = \sum_{k\in G} \psi(k)\varphi(gk^{-1}) \ ; \tag{6.4.1}$$

puisque φ est centrale,

$$\varphi(gk^{-1}) = \varphi(k^{-1}gk^{-1}k) = \varphi(k^{-1}g),$$

donc le membre de droite de (6.4.1) est $\psi * \varphi(g)$ comme il fallait démontrer.

Réciproquement, supposons $\varphi \in Z(\mathbf{C}[G])$. Alors pour tous $g, h \in G$ on a

$$\delta_g * \varphi(h) = \varphi * \delta_g(h) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(g^{-1}h) = \varphi(hg^{-1}),$$

ce qui prouve que φ est une fonction centrale. □

(6.5) Exercice. Le centre de $\bigoplus_{V\in \mathrm{Irr}(G)} \mathcal{L}(V)$ est constitué des endomorphismes homothétiques par blocs.

(6.6) Proposition. *Si* V *est irréductible et* φ *est une fonction centrale, alors* $\hat\varphi_V$ *est une homothétie, de rapport*

$$\frac{|G|}{\dim(V)}(\bar\chi_V, \varphi).$$

Preuve. On a essentiellement déjà tout vu : $\hat\varphi_V$ est G-linéaire par le Lemme (3.11), donc une homothétie par le Lemme de Schur, et son rapport est

$$\frac{\mathrm{Tr}(\hat\varphi_V)}{\dim(V)} = \frac{1}{\dim(V)} \sum_{g\in G} \varphi(g)\chi_V(g).$$

□

(6.7) Corollaire. *La transformation de Fourier réalise un isomorphisme entre l'algèbre des fonctions centrales et l'algèbre des homothéties par blocs.*

6.3 – Décomposition en série de Fourier

(6.8) Coefficients de Fourier. Soit $f \in \mathbf{C}[G]$. Pour tout $V \in \mathrm{Irr}(G)$, on pose

$$c_f(V) = (\chi_V, f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_{V^{-1}}(g) f(g).$$

(6.9) Décomposition en série de Fourier. Puisque les caractères des représentations irréductibles forment une base de l'algèbre des fonctions centrales, on a pour tout $f \in \mathbf{C}[G]^G$,

$$f = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} (\chi_V, f).\chi_V = c_f(V).\chi_V$$

(6.10) Formule de Plancherel. Pour tout $f, g \in \mathbf{C}[G]^G$,

$$(f, g) = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{c_f(V)} c_g(V).$$

C'est simplement le calcul du produit scalaire dans une base orthonormale !

6.4 – Cas des groupes abéliens finis

(6.11) Si G est abélien fini, $\mathbf{C}[G]$ est une algèbre commutative (et toutes les fontions sont centrales) ; $\mathrm{Irr}(G)$ s'identifie au groupe dual $\hat{G}$ des caractères multiplicatifs (puisque toutes les représentations irréductibles sont de dimension 1), isomorphe à G (non canoniquement) ; on a un isomorphisme

$$\Big(\bigoplus_{\chi \in \hat{G}} \mathcal{L}(V_\chi), \circ\Big) \cong \big(\mathbf{C}[\hat{G}], \cdot\big)$$

(la loi multiplicative sur le membre de droite est le produit usuel des fonctions) : on retrouve la transformation de Fourier classique !

Références

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory — A first Course*, Springer, New York, 2004.

[H2G2] P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et géométries*, Calvage & Mounet, Paris, 2015.

[OD] O. Debarre, *Algèbre 1*, cours de L3 à l'École normale supérieure, `http://www.math.ens.fr/~debarre/Algebre1.pdf`