Etude des surfaces de Riemann compactes

Thomas Dedieu

9 juillet 2004

Table des matières

Introduction

On s'intéresse ici à l'étude des surfaces de Riemann compactes. Notre but est de montrer qu'on peut les réaliser comme des courbes algébriques d'un espace projectif complexe, mais on peut dire que le chemin le plus direct n'a pas forcément eu notre préférence ; nous avons plutôt considéré notre but initial comme un prétexte à faire des mathématiques. On a utilisé autant que possible des méthodes modernes et s'appliquant à d'autres problèmes.

Il est par exemple fait un usage intensif des résultats issus de la théorie des faisceaux, bien que celle-ci ne soit pas exposée ici. On en trouve une belle présentation dans [God58]. Dans le même esprit, notre exposé se trouve souvent aux frontières de la géométrie algébrique ; on a choisi un point de vue qui ne la mette pas pleinement en jeu, le temps manquant pour son étude précise, mais le lecteur averti la reconnaîtra facilement au fil du texte.

C'est le théorème de Riemann-Roch qui constitue le cœur de l'énoncé. On commence, étape inévitable lorsque l'on traite de surfaces de Riemann, par donner quelques résultats élaborés de théorie des fonctions analytiques (on pense ici notamment aux théorèmes de Weierstrass), leur théorie élémentaire étant supposée connue (on pourra en trouver un exposé très clair dans [Bos00]). Ensuite, on présente brièvement les opérateurs pseudo-différentiels, qui nous permettent d'établir un joli théorème sur les opérateurs différentiels elliptiques, que l'on applique au laplacien pour obtenir le théorème d'isomorphisme de Hodge et la dualité de Serre. On utilise alors ces résultats pour l'étude des faisceaux de diviseurs des surfaces de Riemann compactes, et établir le théorème de Riemann-Roch qui nous permet de plonger les surfaces de Riemann compactes dans des espaces projectifs convenables (et au passage étudier quelques propriétés de ces plongements). On conclut notre étude en prouvant l'algébricité des surfaces de Riemann compactes.

Je remercie Yves Laszlo, qui a su me guider et répondre à mes questions tout au long de ces recherches.

We study here compact Riemann surfaces. Our goal is to show that they can be looked at as algebraic curves in a complex projective space, but we clearly did not choose the most direct way to do it ; our initial goal was rather an occasion to do some mathematics. We used as many modern tools as possible which in addition apply to other problems.

For example we use a great deal of sheaves theoretic results, even if the latter is not explained here. A nice presentation of it can be found in [God58]. In the same manner, this text is often at the border of algebraic geometry ; we chose not to put it in full light, lacking time to study it in details. The wise reader however will recognize it easily.

The heart of this text is Riemann-Roch theorem. We begin by giving a few advanced results in analytic functions theory (this topic being essential when speaking about Riemann surfaces) mainly Weierstrass theorems. The basic analatic functions theory is supposed to be known (a very clear introduction to it is [Bos00]). We then introduce pseudo-differential operators that allow us to establish a very nice theorem about elliptic differential operators, which in turn will be applied to the laplacian and give Hodge isomorphism theorem and Serre duality. We then use these results as tools for the study of divisors sheaves of a compact Riemann surface, and prove Riemann-Roch theorem. We then are able to find embeddings of compact Riemann surfaces into suitable projective spaces (and on our way we will give some properties of these embeddings). We finish our study by showing the algebraicity of compact Riemann surfaces.

I am grateful to Yves Laszlo that managed to show me the way during these researches and answered all my questions.

1 Analyse complexe à plusieurs variables

1.1 La formule de Cauchy

Théorème 1.1.1 *(formule de Cauchy généralisée)*
Soit f une fonction C^∞ à valeurs complexes sur un ouvert U du plan complexe. Si D est un domaine compact de U dont la frontière γ est une réunion de courbes $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $z \in \mathring{D}$ on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_\gamma f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta - z}\right] \\ &= \frac{1}{2i\pi}\left[-\int_\gamma f(\zeta)\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta - \bar z} + \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}\frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\bar\zeta - \bar z}\right] \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $z \in \mathring{D}$. On considère un disque $D(z,r)$ dont l'adhérence est incluse dans D. On note γ_r le cercle $C(z,r)$ (*i.e.* $t \in [0,1] \mapsto z + re^{2i\pi t}$). Alors la frontière de $D \setminus D(z,r)$ est $\gamma - \gamma_r$.
Par ailleurs, dans ce domaine on a :

$$d\left(f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)d\bar\zeta \wedge d\zeta = \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}\,\frac{d\bar\zeta \wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

donc d'après la formule de Stokes, on a :

$$\int_{D\setminus D(z,r)} \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\bar\zeta\wedge d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma - \gamma_r} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

et en passant à la limite (en utilisant les théorèmes de convergence de Lebesgue), on obtient :

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\bar\zeta\wedge d\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - 2i\pi f(z)$$

qui est exactement la première formule. On obtient la seconde formule de la même manière, en remarquant que

$$d\left(f(\zeta)\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta - \bar z}\right) = \frac{\partial f}{\partial\zeta}\,\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\bar\zeta - \bar z}$$

Remarque 1.1.2 *On peut en fait démontrer ce résultat pour une fonction f simplement $\mathcal{C}^1$ en utilisant la formule de Stokes pour les distributions et l'égalité au sens des distributions :*

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{f}{z}\right) = \frac{\bar\partial f}{z} + \pi f(0)\delta_0$$

Théorème 1.1.3 *Soit f une fonction C^∞ à valeurs complexes sur un ouvert U du plan complexe. Si D est un domaine compact de U dont la frontière γ est une réunion de courbes $\mathcal{C}^1$, alors il existe une fonction g définie sur $\mathring{D}$ et de classe C^∞ telle que :*

$$\frac{\partial g(z)}{\partial\bar z} = f(z)$$

Si de plus f est une fonction holomorphe (resp. C^∞) pour d'autres paramètres, alors g sera également holomorphe (resp. C^∞) pour ces paramètres.

Démonstration : On introduit *a priori* la fonction g définie pour tout $z \in \mathring{D}$ par :

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_D f(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

Déjà, cette fonction vérifie clairement la deuxième assertion du théorème. Pour montrer qu'elle vérifie bien l'autre propriété, on se donne une nouvelle fois $z \in \mathring{D}$ et un disque $D(z, r)$ dont l'adhérence est incluse entièrement dans U. On conserve les notations de la démonstration du théorème 1.1.1.

On désigne par log la définition principale du logarithme ; elle est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*$. On obtient, pour $\zeta \in D \setminus D(z, r)$:

$$d(\log|\zeta - z|^2) = d(\log(\zeta - z) + \log(\bar{\zeta} - \bar{z})) = \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

et donc, en remarquant qu'on peut se contenter d'intégrer sur D_r privé d'une demi-droite, celle-ci étant de mesure nulle, on obtient par application de la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D(z,r)} \left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \log|\zeta - z|^2 + \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} &= \int_{D \setminus D(z,r)} d(f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta}) \\ &= \int_{\gamma - \gamma_r} f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 0, on obtient ensuite :

$$\int_\gamma f(\zeta) \log|\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} = \int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \log|\zeta - z|^2 d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + 2i\pi g(z) \tag{1}$$

et alors, la dérivation par rapport à $\bar{z}$ sous le signe somme étant bien licite d'après les théorèmes de Lebesgue :

$$-\int_\gamma f(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = -\int_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} + 2i\pi \frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}}$$

et d'après la formule de Cauchy généralisée, la fonction g vérifie bien $\bar{\partial} g = f$. La formule (1) prouve que g est bien elle ausi C^∞.

Remarque 1.1.4 *on pourrait trouver une fonction h vérifiant $\partial h = f$ en procédant de manière parfaitement analogue.*

1.2 La résolution de Dolbeault

On considère X une variété analytique complexe de dimension n. On note $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, $\Omega^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles C^∞ de bidegré (p, q) (*i.e.* de degré p en dz et q en $d\bar{z}$) sur X, et C^∞ le faisceau des fonctions C^∞ sur X.

Théorème 1.2.1 *La suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,n} \longrightarrow 0$$

est une résolution de $\mathcal{O}$ par des faisceaux mous.

Démonstration : Commençons par rapeller le résultat suivant : si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $f \in \mathcal{D}'(U)$ est une fonction holomorphe sur U si et seulement si elle vérifie l'équation aux dérivées partielles $\bar{\partial} f = 0$ (au sens des distributions). Autrement dit, la suite suivante de faisceaux de groupes abéliens est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{(0,1)}$$

On sait qu'il faut montrer pour tout $x \in X$ que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(x) \longrightarrow \Omega^{0,0}(x) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,n}(x) \longrightarrow 0$$

est un complexe. Soit donc $x \in X$. On considère un voisinage U de x sur lequel on dispose de coordonnées locale $z_1, \ldots, z_n$. Il s'agit alors de voir pour $f \in \Omega^{0,p}$ que $\bar{\partial}(\bar{\partial} f) = 0$. Comme $\bar{\partial}$ est un opérateur linéaire, il suffit de le voir pour $f = \varphi(z_1, \ldots, z_n) d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$:

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}(\bar{\partial}\varphi(z_1, \ldots, z_n) d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}) \\
&\quad = \sum_{k,l} \bar{\partial}_k \bar{\partial}_l \varphi(z_1, \ldots, z_n) d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p} \\
&\quad = \sum_{k \geqslant l} \bar{\partial}_k \bar{\partial}_l \varphi(z_1, \ldots, z_n) \underbrace{(d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p} + d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p})}_{=0}
\end{aligned}$$

A présent, il nous faut encore démontrer qu'il s'agit d'une suite exacte pour établir que nous disposons d'une résolution du faisceau $\mathcal{O}$. Ce résultat sera établi (toujours en se souvenant qu'il suffit d'établir le résultat pour les fibres) quand nous aurons démontré le fait suivant :

Théorème 1.2.2 *(Lemme de Dolbeault)*
Soit $\bar{\Delta}$ un polydisque compact de $\mathbb{C}^n$, ω une forme différentielle C^∞ de bidegré (p, q) définie sur un voisinnage ouvert de $\bar{\Delta}$.
Si $q > 0$ et $\bar{\partial}\omega = 0$, alors il existe η forme différentielle C^∞ dans Δ telle que $\bar{\partial}\eta = \omega$.

Démonstration : On fixe une fois pour toutes le bidegré (p, q) de ω, et on raisonne par récurrence sur ν, le plus petit entier tel que seuls $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_\nu$ interviennent dans l'expression de ω. Si $\nu = 0$, comme $q > 0$, ω est nécessairement la forme nulle, et le résultat est alors trivial. Supposons $\nu > 0$. On écrit

$$\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \beta$$

où α et β sont des formes différentielles C^∞ dans l'expression desquelles n'interviennent que $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{\nu-1}$. La condition $\bar{\partial}\omega = 0$ s'écrit alors :

$$d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta = 0$$

Pour les indices $l > \nu$, si φ (resp. ψ) est le coefficients de α (resp. β) relatif à la forme $d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_d}$ ($1 \leqslant d \leqslant \nu$), alors le coefficient de $d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta$ relatif à $d\bar{z}_\nu \wedge d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_d}$ (resp. $d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_d}$) est $\bar{\partial}_l \varphi$ (resp. $\bar{\partial}_l \psi$). La nullité de la forme $d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}\beta$ nous donne donc l'holomorphie relativement aux paramètres $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$ des coefficients de α et β.
Un coefficient φ de α est donc une fonction C^∞ de z_ν sur un voisinnage ouvert du disque $\bar{\Delta}_\nu$ (en écrivant $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$), holomorphe en $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$ et C^∞ en $z_1, \ldots, z_{\nu-1}$ (les paramètres variant eux aussi dans des voisinnages ouverts des disques $\bar{\Delta}_i$). Alors, d'après le théorème 2.1.6, il existe une fonction $\tilde{\varphi}$, C^∞ en z_ν dans un voisinnage ouvert de $\bar{\Delta}_\nu$ (qui est aussi holomorphe en

les $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$ et C^∞ en $z_1, \ldots, z_{\nu-1}$) vérifiant $\bar\partial_\nu \tilde\varphi = \varphi$ (et $\bar\partial_l \tilde\varphi = 0$ pour $l > \nu$). En remplaçant chaque φ par le coefficient $\tilde\varphi$ correspondant, on obtient donc une nouvelle forme différentielle C^∞ γ telle que :

$$\bar\partial\gamma = d\bar z_\nu \wedge \alpha + \delta$$

où δ est une forme différentielle dans laquelle n'interviennent que les $d\bar z_1, \ldots, d\bar z_\nu$.
Alors, dans la forme différentielle $\omega - \bar\partial\gamma = \beta - \delta$, seuls les $d\bar z_1, \ldots, d\bar z_{\nu-1}$ interviennent. Donc par hypothèse de récurrence, on peut écrire $\omega - \bar\partial\gamma = \bar\partial\eta$, et donc :

$$\omega = \bar\partial\gamma + \bar\partial\eta = \bar\partial(\gamma + \eta)$$

C.Q.F.D.

Enfin, pour voir que notre résolution est bien une résolution par des faisceaux mous, il s'agit de voir que chacun des $\Omega^{0,q}$ est un faisceau mou. Ce sera fait lorsque nous aurons démontré le résultat suivant :

Proposition 1.2.3 *Un C^∞-module est nécessairement un faisceau mou.*

Démonstration : Soit S un fermé de X, f une section au dessus de S. On se donne un voisinnage ouvert U de S, tel qu'il existe $\tilde f$ au-dessus de U qui induise f sur S (en toute généralité, il faut pour cela que S possède un système fondamental de voisinnages paracompacts, ce qui est le cas ici). Par ailleurs, pour tout $x \in X \setminus S$, il existe un V_x ouvert qui contient x et qui ne rencontre pas S (car celui-ci est fermé) On peut donc se donner un recouvrement ouvert de la forme :

$$X = U \cup \bigcup_i V_i, \quad V_i \cap S = \emptyset \tag{2}$$

Considérons alors une partition de l'unité relative au recouvrement (2). On la note μ, (ν_i) (avec des notations évidentes). Alors la fonction μ (définie sur X tout entier, bien entendu) vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} \forall x \in X & 0 \leqslant \mu(x) \leqslant 1 \\ \forall x \notin U & \mu(x) = 0 \\ \forall x \in S & \mu(x) = 1 \end{cases}$$

On n'a alors aucun mal à trouver une section au dessus de X qui induise $\mu\tilde f$ sur U (en prolongeant par 0 hors de U), et donc f sur S, ce qui achève notre démonstration.

1.3 Irréductibilité dans $\mathcal{O}_n$

De la même manière qu'en dimension 1, une fonction f de classe C^∞ sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ est holomorphe si et seulement si $\bar\partial f = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \bar\partial_i f d\bar z_i = 0$ ou de manière équivalente si $f(z_1, \ldots, z_n)$ est holomorphe en chacune des variables z_i séparément. On démontre en utilisant n fois la formule de Cauchy (pour les fonctions holomorphes à une variable) que f est holomorphe si et seulement si elle possède partout un développement local en série entière en les variables z_i :

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \geqslant 0} a_{m_1,\ldots,m_n}(z_1 - \omega_1)^{m_1} \ldots (z_n - \omega_n)^{m_n}$$

(pour $(z_1, \ldots, z_n)$ proche de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$)

Définition 1.3.1 *(polynômes de Weierstrass)*
Un polynôme de Weierstrass de degré d en w sur $\mathbb{C}^n$ est une fonction de la forme

$$w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_d(z)$$

où les a_i sont des fonctions holomorphes sur un voisinnage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$ telles que $a_i(0) = 0$.

Théorème 1.3.2 *(de préparation de Weierstrass)*
Soit f holomorphe autour de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, telle que $f(0) = 0$. Si f n'est pas identiquement nulle sur l'axe des z_n, alors il existe un voisinage de l'origine dans lequel f s'écrive de manière unique

$$f = gh$$

où g est un polynôme de Weierstrass en z_n, et h une fonction holomorphe telle que $h(0) \neq 0$.

Démonstration : considérons $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, telle que $f(0) = 0$. Pour la suite de la démonstration, on notera $w = z_n$ et $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle sur l'axe des w *i.e.* que le dévelopement en série entière de f autour de l'origine contient un terme aw^d avec $a \neq 0$ et $d \geqslant 1$ (on considère pour la suite un tel d, que l'on suppose minimal).

Soit $\delta > 0$. Comme f n'est pas identiquement nulle sur l'axe des w, il existe $r > 0$ tel que pour $|w| = r$, on ait $|f(0, w)| \geqslant \delta$. Alors, par continuité, on peut considérer $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z, w)| \geqslant \delta/2$ pour tout $|w| = r$ et $\|z\| \leqslant \varepsilon$. A $\|z\| \leqslant \varepsilon$ fixé, on note $b_1, \ldots, b_d$ les racines de l'équation $f(z, w) = 0$ dans le disque $|w| < r$ (compte-tenu de la forme locale au voisinnage de 0 de la fonction holomorphe $w \mapsto f(z, w)$, pour r suffisamment petit il y a exactement d racines distinctes). Alors, en appliquant le théorème des résidus (pour les fonctions holomorphes à une seule variable), on obtient :

$$b_1^q + \cdots + b_d^q = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=r} \frac{w^q (\partial f/\partial w)(z, w)}{f(z, w)} dw$$

ce qui prouve que les sommes $\sum_{1 \leqslant i \leqslant d} b_i(z)^q$ sont des fonctions analytiques de z pour $\|z\| \leqslant \varepsilon$. Or on sait que les fonction symétriques élémentaires $\sigma_1(z), \ldots, \sigma_d(z)$ de $b_1, \ldots, b_d$ s'écrivent comme des polynômes en ces sommes $\sum_{1 \leqslant i \leqslant d} b_i(z)^q$ $(1 \leqslant q \leqslant d)$. Ce sont donc elles aussi des fonctions holomorphes en z pour $\|z\| \leqslant \varepsilon$. Alors, le polynôme de Weierstrass

$$g(z, w) = w^d - \sigma_1(z)w^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d(z)$$

est holomorphe pour $\|z\| \leqslant \varepsilon$ et $|w| < r$. On sait par ailleurs que ce polynôme s'annule à z fixé exactement en $b_1(z), \ldots, b_d(z)$.

On définit alors la fonction h dans l'ouvert $\{\|z\| \leqslant \varepsilon, |w| < r\}$ privé des zéros de f et g comme étant le quotient

$$h(z, w) = \frac{f(z, w)}{g(z, w)}$$

h est holomorphe sur ce domaine de définition. Or, $h(z, w)$ n'a que des singularités illusoires sur le disque $|w| < r$, donc pour tout $\|z\| \leqslant \varepsilon$ fixé, elle se prolonge en une fonction analytique en w sur tout le disque $|w| < r$. On voit alors que h ainsi prolongée est également holomorphe en la variable z en écrivant $h(z, w) = 1/2i\pi \int_{|u|=r} h(z, u)/(u - w)du$.

On vient de démontrer l'existence d'une écriture $f = gh$ comme dans l'énoncé du théorème. L'unicité d'une telle écriture est claire.

Avant de continuer, on rappelle les faits suivants concernant les anneaux à factorisation unique. Soit R un anneau intègre. Une unité est un élément $u \in R$ pour lequel il existe $v \in R$ tel que $uv = 1$. $u \in R$ est un élément irréductible si $u = vw$ implique que parmi v et w, l'un au moins est une unité. Enfin, R est un anneau à factorisation unique si tout élément $u \in R$ peut s'écrire comme le produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles, $u = v_1 \dots v_m$, les v_i étant uniques à multiplication par une unité près. Le lemme de Gauss nous assure que si R est un anneau à factorisation unique, alors il en est de même pour l'anneau $R[X]$. Enfin, si R est un anneau à factorisation unique, et si $u, v \in R[X]$ sont premiers entre eux, alors il existe $\alpha, \beta \in [X]$ premiers entre eux et $\gamma \in R$ non nul tels que $\alpha u + \beta v = \gamma$. γ est apelé le résultant de u et v.

Proposition 1.3.3 *$\mathcal{O}_n$, l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, est un anneau à factorisation unique.*

Démonstration : on procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. Dans $\mathcal{O}$, les unités sont les fonctions holomorphes telles que $f(0) \neq 0$. $f \in \mathcal{O}$ s'écrit de manière unique

$$f(z) = z^n h(z)$$

au voisinage de l'origine, où h est une fonction holomorphe sur ce voisinage ne s'anulant pas en 0. Ceci démontre le résultat pour $n = 1$.

Supposons à présent que $\mathcal{O}_{n-1}$ soit un anneau à factorisation unique, et considérons $f \in \mathcal{O}_n$. On peut supposer (quitte à faire un changement de variables) que $f(0, \dots, 0, w)$ n'est pas identiquement nulle. On écrit alors

$$f = gh$$

comme dans le théorème 1.3.2, où h est une unité dans $\mathcal{O}_n$ (*i.e.* comme dans le cas $n = 1$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas au voisinage de l'origine) et $g \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ est un polynôme de Weierstrass. Mais $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ est un anneau à factorisation unique d'après le lemme de Gauss et l'hypothèse de récurrence ; on écrit alors g comme le produit d'éléments irréductibles de $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ (uniques à multiplication par une unité près), et alors

$$f = g_1 \dots g_m h$$

Réciproquement, supposons que l'on ait écrit $f = f_1 \dots f_k$ où les $f_i \in \mathcal{O}_n$ sont des irréductibles. Nécessairement, chaque f_i est tel que $f_i(0, \dots, 0, w)$ ne soit pas identiquement nulle, et donc s'écrit $f_i = g_i' h_i$, g_i' étant un polynôme de Weierstrass (bien sûr irréductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$) et h_i une unité. Alors

$$f = gh = \left(\prod g_i'\right)\left(\prod h_i\right)$$

et d'après la partie unicité du théorème 1.3.2 on a $g = \prod g_i'$. Alors, comme $\mathcal{O}_{n-1}[w]$ est un anneau à factorisation unique, les g_i' sont exactement les g_i, à multiplication par des unités près.

Théorème 1.3.4 *(de division de Weierstrass)*
Soit $h(z, w) \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ un polynôme de Weierstrass de degré k. Alors tout $f \in \mathcal{O}_n$ s'écrit de manière unique

$$f = gh + r$$

avec g holomorphe dans un voisinage de l'origine, et $r \in \mathcal{O}_{n-1}[w]$ de degré inférieur à $k - 1$.

Démonstration : de la même manière que dans la démonstration du théorème de préparation de Weierstrass, on considère $r, \varepsilon > 0$ tels que pour $|w| = r$ et $\|z\| \leqslant \varepsilon$, on ait $h(z, w) \neq 0$. Alors, l'expression

$$g(z, w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(z, \zeta)}{h(z, \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - w}$$

définit une fonction holomorphe sur le polydisque $\{\|z\| \leqslant \varepsilon, |w| < r\}$. Alors, posant

$$r(z,w) = f(z,w) - g(z,w)h(z,w)$$

on obtient à nouveau une fonction holomorphe. Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} r(z,w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(z,\zeta)}{h(z,\zeta)}\left[\frac{h(z,\zeta)-h(z,w)}{\zeta - w}\right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(z,\zeta)}{h(z,\zeta)}\left[\frac{(\zeta^k - w^k) + a_1(z)(\zeta^{k-1}-w^{k-1}) + \cdots + a_{k-1}(z)(\zeta - w)}{\zeta - w}\right] d\zeta \end{aligned}$$

en tenant compte de ce que h est un polynôme de Weierstrass. Cette dernière expression prouve que r s'exprime autour de l'origine comme un élément de $\mathcal{O}_{n-1}[w]$.

Reste alors à voir l'unicité d'une telle écriture. Supposons avoir écrit de la même manière $f = g_1 h + r_1$. On a alors

$$r(z,w) - r_1(z,w) = h(z,w)[g_1(z,w) - g(z,w)]$$

On choisit $r, \varepsilon > 0$ tels que pour $\|z\| \leqslant \varepsilon$ fixé, $h(z,w)$ a k zéros distincts dans le disque ouvert $|w| < r$. Mais alors, $r(z,w) - r_1(z,w)$ est un polynôme de degré $k-1$ en w, et a k zéros distincts : c'est donc le polynôme nul pour ce z. On en déduit que $r - r_1$ est identiquement nulle, et il en va alors de même pour $g_1 - g$, car h n'est pas identiquement nul.

Corollaire 1.3.5 *(nullstellensatz faible)*
Si $f(z,w) \in \mathcal{O}_n$ est irréductible, et si $h \in \mathcal{O}_n$ s'annule sur l'ensemble des zéros de f, alors f divise h dans $\mathcal{O}_n$.

Démonstration : on peut supposer que f est un polynôme de Weierstrass de degré k en w (comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 1.3.3). Comme f est irréductible, f et $\partial f/\partial w$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{O}_{n-1}[w]$. Cela nous autorise à écrire

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial w} = \gamma$$

avec des notations évidentes. Si $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ est tel que $\gamma(z) \neq 0$, $f(z,w)$ et $\partial_w f(z,w)$ sont des polynômes de $\mathbb{C}[w]$ (z est fixé) premiers entre eux d'après le théorème de Bezout, donc $f(z,w)$ a k racines disctinctes. Par ailleurs, on écrit grâce au théorème de division

$$h = fg + r$$

où r est un polynôme de Weierstrass de degré inférieur à $k-1$. Mais pour z_0 qui ne soit pas un zéro de γ, $h(z_0, w)$ s'annule au moins pour les k racines distinctes de l'équation en w $f(z,w) = 0$. Du coup, $r(z_0, w) = 0$. Comme γ n'est pas identiquement nulle, on en déduit $r = 0$ et $f = gh$, ce qu'il fallait démontrer.

1.4 Les fonctions analytiques vues comme des revêtements ramifiés

Théorème 1.4.1 *Soient X et Y deux surfaces de Riemann compactes et connexes, $f : X \to Y$ une fonction analytique non constante. Alors :*

- *il y a un nombre fini de points de ramification ; on note $R \subset X$ l'ensemble de ces points, et $S = f(R) \subset Y$.*

– $X \setminus f^{-1}(S) \xrightarrow{f} Y \setminus S$ *est un revêtement à* n *feuillets, pour un certain entier* n *que l'on appellera le degré de* f.
– *pour* $Q \in Y$ *quelconque :*

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} v_f(P) = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} ord_P(f - Q) = n$$

Démonstration : si $x \in X$ est un point de ramification de f, il existe un voisinnage de x où f s'écrit $f(z) = y + (z-x)^p h(z)$, où $p \geqslant 2$ est un entier et h une fonction analytique ne s'annulant pas en x. Dès lors, x est le seul point de ramification dans ce voisinnage. On construit de cette façon un recouvrement de X par des ouverts contenant au plus un point de ramification ; par compacité, il n'existe alors qu'un nombre fini de points de ramification.

Soit $Q \notin S$. On note $f^{-1}(Q) = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on considère U_i et V_i des voisinnages de P_i et Q respectivement tels que f réalise un homéomorphisme entre U_i et V_i (c'est possible d'après le théorème d'inversion locale, car P_i n'est pas un point de ramification) :

$$U_i \xrightarrow[f]{\sim} V_i$$

Quitte à prendre des voisinnages plus petits, on peut supposer que les U_i sont disjoints deux à deux et que les V_i ne rencontrent pas S. Soit alors V un voisinnage connexe de Q contenu dans $\bigcap V_i$. Alors, f réalise un homéomorphisme entre $U'_i = U_i \cap f^{-1}(V)$ et V :

$$U'_i \xrightarrow[f]{\sim} V$$

On va montrer que $f^{-1}(V) = \bigcup U'_i$ si V est assez petit, ce qui prouvera la deuxième assertion du théorème. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite (N_i) de voisinnages tels que

$$\bigcap N_i = \{Q\} \qquad \exists P'_i \in f^{-1}(N_i) \textit{ et } P'_i \notin \bigcup U_i$$

Alors par compacité, et quitte à extraire une sous-suite, on peut suposer que P'_i converge vers $P \in X$. Alors $f(P) = Q$ par continuité, donc $P = P_{j_0}$ pour un certain j_0, et les P'_i sont dans U'_{j_0} à partir d'un certain rang : contradiction !

Il faut alors se convaincre que le n (qui correspond au nombre de feuillets) est le même pour tout les points de $Y \setminus S$ (autrement dit que le nombre de feuillets est un nombre qui a une définition convenable). C'est un résultat bien connu sur les revêtements : l'ensemble des points à n antécédents est ouvert et fermé dans Y, qui est connexe ; donc dès qu'il est non-vide, c'est Y tout entier.

Enfin, pour voir le dernier point du théorème, considérons $Q \in Y$ et notons $f^{-1}(Q) = \{P_1, \ldots P_m\}$. On considère U_i (pour $1 \leqslant i \leqslant m$) et V des voisinnages de P_i et Q respectivement, munis de coordonnées locales telles que :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f} & V \\ z & \longmapsto & z^{v_f(P_i)} \end{array}$$

Dans chaque U_i, le seul point qui puisse être un point de ramification est P_i : $f : U_i \setminus \{z = 0\} \longrightarrow V \setminus \{z = 0\}$ est un revêtement non ramifié à $v_f(P_i)$ feuillets. En prenant un point Q' suffisamment proche de Q, on est sûr d'obtenir avec ces revêtements tous les antécédents par f de Q' (sinon on pourrait exhiber une suite (Q'_p) tendant vers Q telle qu'il existe pour tout p un antécédent P'_p de Q'_p qui ne soit dans aucun des U_i ; on peut supposer la suite P'_p convergente (quitte à extraire une sous-suite, X étant compacte) : sa limite est alors elle-aussi hors des U_i. $f(P'_p) = Q_p$ converge vers Q, et comme f est continue, on a alors construit un antécédent de Q hors des U_i : absurde !). On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{m} v_f(P_i) = n$$

ce qui conclut la preuve.

Corollaire 1.4.2 *Soit X une surface de Riemann compacte et connexe, f une fonction méromorphe sur X. Alors*

$$\sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) = 0$$

En effet, une fonction méromorphe sur X n'est autre qu'une fonction analytique de X dans la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Si la fonction est constante, le résultat est trivial, et sinon d'après le théorème précédent :

$$\sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} v_f(P) - \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} v_f(P) = 0$$

2 Théorème d'isomorphisme de Hodge

2.1 Introduction au calcul pseudo-différentiel

2.1.1 Opérateurs différentiels

On considère M une variété différentiable C^∞ ($\dim_{\mathbb{R}} = m$), E et F des fibrés vectoriels complexes sur M (mais on pourrait tout aussi bien les choisir réels) de rang respectif r et r'. Un opérateur différentiel est une application linéaire :

$$P \ : \ C^\infty(M,E) \longrightarrow C^\infty(M,F)$$

dont la restriction à n'importe quel ouvert qui soit à la fois un ouvert de carte pour M et trivialisant pour E et F s'écrive, pour $u \in C^\infty(M,E)$:

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \delta} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_m)$ est la coordonnée relative à l'ouvert de carte, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ est un multi-indice entier (et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$), $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m}$ et $a_\alpha(x)$ est une application de $\mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{C}^{r'}$ variant de façon C^∞ avec le paramètre x (*i.e.* une matrice $r' \times r$ à coefficients C^∞). δ est appelé le degré de l'opérateur différentiel.

Si maintenant on se donne $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, et $t \in \mathbb{C}$ un paramètre, on calcule (toujours dans un ouvert convenable) :

$$\begin{aligned}
e^{-tf(x)} P\left(e^{tf(x)}u(x)\right) &= e^{-tf(x)} \sum_{|\alpha| \leqslant \delta} a_\alpha(x) \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m} \left(e^{tf(x)}u(x)\right) \\
&= t^\delta \left(\sum_{|\alpha| = \delta} (\partial_1 f(x))^{\alpha_1} \ldots (\partial_m f(x))^{\alpha_m} a_\alpha(x) \right) u(x) + Q(x)(t) \\
&= t^\delta \left(\sum_{|\alpha| = \delta} (df(x))^\alpha a_\alpha(x) \right) u(x) + Q(x)(t)
\end{aligned}$$

où $Q(x)(t)$ est un polynôme en t de degré inférieur à $\delta - 1$, et où on l'a identifié $df(x)$ et sa représentation dans la base canonique de $(\mathbb{C}^m)^*$ (autrement dit on identifie $df(x) = \partial_1 f(x) dx_1 + \cdots + \partial_m f(x) dx_m$ et le vecteur $(\partial_1 f(x), \ldots, \partial_m f(x))$).

C'est ce calcul qui force la définition du symbole principal de P. On note T_M^* le fibré cotangent de la variété M : si $(x, \xi) \in T_M^*$, x est un élément de M et ξ une forme linéaire sur l'espace tangent à M en x (*i.e.* un élément de la forme $a_1 dx_1 + \cdots + a_m dx_m$ en coordonnées locales). On définit alors, pour $(x, \xi) \in T_M^*, \xi \neq 0$:

$$\sigma_P(x, \xi) \ : \ u \in E_x \longmapsto \sum_{|\alpha| = \delta} \xi^\alpha a_\alpha(x) \ u \in F_x$$

toujours dans un ouvert de cartes trivialisant à la fois pour E et F, et en désignant par E_x et F_x les fibres de E et F au-dessus de $x \in M$. σ_P est appelé le symbole principal de P. C'est une fonction C^∞ des variables (x, ξ), indépendante du choix des coordonnées et des trivialisations choisies pour le définir (en effet, les a_α proviennent de P qui est défini globalement, et donc vérifient les conditions de changements de variables nécessaires)

Si on suppose que M est orientée et munie d'une forme volume $dV(x) = \gamma(x)dx_1 \dots dx_m$ de classe C^∞ (γ étant une densité strictement positive), et si E est un fibré hermitien, on peut définir l'espace de Hilbert $L^2(M,E)$ des sections globales à valeurs dans E qui sont de carré sommable pour le produit scalaire :

$$\ll u, v \gg = \int_M < u(x), v(x) > dV(x)$$

Définition 2.1.1 *(adjoint formel)*
Si $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ est un opérateur différentiel et si les fibrés E et F sont hermitiens, il existe un unique opérateur différentiel $P^* : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,E)$ tel que pour toutes sections $u \in C^\infty(M,E)$ et $v \in C^\infty(M,F)$ telles que $Supp(u) \cap Supp(v)$ soit compact dans M on ait $\ll Pu, v \gg = \ll u, P^*v \gg$.

Preuve : l'unicité vient du fait que les formes C^∞ à support compact sont denses dans $L^2(M,E)$. On se ramène à montrer l'existence locale de P^* par un argument de partition de l'unité. On suppose que $Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \delta} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$ est le développement de P relativement à des trivialisations de E et F associées à des repères orthonormés et à un système de coordonnées locales sur $\Omega \subset M$. En supposant que l'intersection des supports est compacte, on obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\ll Pu, v \gg &= \int_\Omega \sum_{\alpha,\lambda,\mu} a_{\alpha\lambda\mu} D^\alpha u_\mu(x) \bar{v}_\lambda(x) \gamma(x) dx_1 \dots dx_m \\
&= \int_\Omega \sum_{\alpha,\lambda,\mu} (-1)^{|\alpha|} u_\mu(x) \overline{D^\alpha(\gamma(x) \bar{a}_{\alpha\lambda\mu} v_\lambda(x))} dx_1 \dots dx_m \\
&= \int_\Omega < u, \sum_{|\alpha| \leqslant \delta} (-1)^{|\alpha|} \gamma(x)^{-1} D^\alpha (\gamma(x) \bar{a}_\alpha^\dagger v_\lambda(x) > dV(x)
\end{aligned}$$

ce qui montre que P^* existe. De plus, la formule ci-dessus montre la relation au niveau des symboles principaux :

$$\sigma_{P^*}(x,\xi) = (-1)^\delta \sum_{|\alpha|=\delta} \bar{a}_\alpha^\dagger \xi^\alpha = (-1)^\delta \sigma_P(x,\xi)^* \tag{3}$$

2.1.2 Espaces de Sobolev

Dans le cas d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, on rappelle :

Définition 2.1.2 *(espace de Sobolev) Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit :*

$$W^s(U) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(U),\ \hat{u} \in L^2_{loc}(U) \text{ et } \int_U |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}$$

où $\mathcal{S}'(U)$ est l'espace de Schwartz des distributions tempérées sur U.

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$< u, v >_s = \int_U u(x) \overline{v(x)} (1 + |\xi|^2)^s d\xi$$

Dans le cas où $s \in \mathbb{N}$, la norme $\|.\|_s$ induite par le produit scalaire est équivalente à $\|.\tilde{\|}_s$ définie pour tout $u \in W^s(U)$ par :

$$\|u\tilde{\|}_s = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha u\|_{L^2}$$

et ainsi W^s est l'espace de Hilbert des distributions sur U dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à s dont dans L^2.

On considère à présent une variété différentiable C^∞ M compacte ($\dim_{\mathbb{R}} = m$), et E un fibré vectoriel complexe de rang r sur M. On veut définir un espace de Sobolev $W^s(M, E)$ de sections de E au-dessus de M. On recouvre M par un nombre fini d'ouverts de carte U_j ($1 \leqslant j \leqslant k$) qui soient trivialisants pour E. On considère une partition de l'unité (ψ_j) relative aux U_j, et pour chaque j une base orthonormée $e_1(j), \ldots, e_r(j)$ de sections C^∞ au dessus de U_j. On pose alors pour une section u à coefficients distributions :

$$\|u\|_s = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant r} \|\psi_j u_{j,\lambda}\|_s$$

où la restriction u_j de u à un U_j quelconque a été écrite $u_j = \sum_\lambda u_{j,\lambda} e_\lambda(j)$. A équivalence de normes près, $\|.\|_s$ est indépendante des choix faits, et définit donc convenablement l'espace de Sobolev $W^s(M, E)$.

On donne sans démonstration les résultats suivants, généralisations aux fibrés vectoriels de résultats classiques sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1.3 *(inclusions de Sobolev)*
Pour $s > k + m/2$, on $W^s(M, E) \subset C^k(M, E)$, et l'inclusion est continue.

Théorème 2.1.4 *(Rellich)*
Pour tout $t > s$, l'inclusion $W^t(M, E) \hookrightarrow W^s(M, E)$ est un opérateur linéaire compact.

2.1.3 Opérateurs pseudo-différentiels

Cas d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ Si $P = \sum_{|\alpha| \leqslant \delta} a_\alpha D^\alpha$ est un opérateur différentiel sur U alors pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$ on a, par la formule d'inversion de Fourier :

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix \cdot \xi} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant \delta} (i\xi)^\alpha a_\alpha(x) \right) \hat{u}(\xi) d\xi$$

en prenant $\hat{u}(\xi) = \int_U e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$ comme définition de la transformée de Fourier, et en se souvenant qu'alors $\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$. On veut définir une classe plus générale d'opérateurs en s'inspirant de cette formule.

Définition 2.1.5 *(classe standard de symboles)*
Pour tout $\delta \in \mathbb{R}$, $S^\delta_c(U)$ est la classe des fonctions $(x, \xi) \in T^*_U \mapsto \sigma(x, \xi)$ de classe C^∞ à support compact relativement à x telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$ on ait une estimation :

$$\forall (x, \xi) \in T^*_U \qquad |D^\alpha_x D^\beta_\xi \sigma(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{\delta - |\beta|} \tag{4}$$

Avec une telle définition, la formule suivante définit bien un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(U)$ dans lui-même :

$$\forall u \in \mathcal{D}(U) \qquad A_\sigma u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sigma(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix.\xi}\frac{d\xi}{(2\pi)^m}$$

En effet, pour $u \in \mathcal{D}(U)$, $\hat{u}$ est une fonction à décroissance rapide donc d'une part l'intégrale est bien convergente, et d'autre part on peut appliquer les théorèmes de Lebesgues de dérivation sous le signe somme pour montrer le caractère C^∞ de $A_\sigma u$.
On se limite ici aux symboles à support compact pour simplifier les démonstrations. De toute façon, nous n'utiliserons les opérateurs pseudo-différentiels que pour étudier des fibrés vectoriels sur une variété compacte.
Nous aurons besoin pour la suite de l'estimation suivante :

Lemme 2.1.6 *Soient $p \in \mathbb{R}$, $N > m + |p|$. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^m$ et tout $t \in [0,1]$:*

$$\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\zeta|)^{-N}(1+|\eta+t\zeta|)^p d\zeta \leqslant C(1+|\eta|)^p$$

Preuve : on découpe l'intégrale, en distinguant les valeurs de ζ pour lesquelles $|\zeta| < (1+|\eta|)/2$ et celles pour lesquelles $|\zeta| \geqslant (1+|\eta|)/2$.

- pour les premières, on a d'une part

  $$1+|\eta+t\zeta| \leqslant 1+|\eta|+|\zeta| \leqslant \frac{3}{2}(1+|\eta|)$$

  et d'autre part

  $$1+|\eta+t\zeta| \geqslant 1+|\eta|-t|\zeta| \geqslant 1+|\eta|-|\zeta| \geqslant \frac{1}{2}(1+|\eta|)$$

  donc en distinguant les cas $p > 0$ et $p < 0$, et en tenant compte de ce que pour $N > m$, $\int_{\mathbb{R}^m}(1+|\zeta|)^{-N}d\zeta < \infty$, on obtient que l'intégrale correspondant aux premières valeurs de ζ est majorée par $C(1+|\eta|)^p$
- pour les autres valeurs de ζ, si $p \leqslant 0$, alors $(1+|\eta+t\zeta|)^p \leqslant 1$, et l'intégrale correspondante est majorée pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit par

  $$\int_{|\zeta|\geqslant(1+|\eta|)/2}(1+|\zeta|)^{-N}d\zeta \leqslant \int_{|\zeta|\geqslant(1+|\eta|)/2}(1+|\zeta|)^{m-N+\varepsilon}(1+|\zeta|)^{-m-\varepsilon}d\zeta \leqslant C(1+|\eta|)^{m-N+\varepsilon}$$

  (en majorant $(1+|\zeta|)^{m-N+\varepsilon}$ en utilisant $|\zeta| \geqslant (1+|\eta|)/2$) et donc en faisant tendre ε vers 0, l'intégrale est majorée par $C(1+|\eta|)^{m-N} \leqslant C(1+|\eta|)^p$. Si maintenant $p \geqslant 0$, $(1+|\eta+t\zeta|)^p \leqslant C|\zeta|^p$, et de la même manière que pour le cas $p \leqslant 0$, l'intégrale correspondante est majorée par $C(1+|\eta|)^{m+p-N} \leqslant C(1+|\eta|)^p$.

C.Q.F.D.

Théorème 2.1.7 *(prolongement)*
Soit $\sigma \in S_c^\delta(U)$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, A_σ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu $W^s(U) \longrightarrow W^{s-\delta}(U)$.

Démonstration : comme $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $W^s(U)$ et que $W^s(U)$ et $W^{s-\delta}(U)$ sont tous les deux des espaces de Banach, il suffit de montrer pour tout $u \in \mathcal{D}(U)$ que $\|A_\sigma u\|_{s-\delta} \leqslant C\|u\|_s$ pour une certaine constante C.

Soit $u \in \mathcal{D}(U)$. On a :

$$\widehat{A_\sigma u}(\xi) = \int_U e^{-ix.\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\eta} \sigma(x,\eta) \hat{u}(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^m} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\frac{d\eta}{(2\pi)^m}$$

où $\hat{\sigma}(\zeta,\xi)$ désigne la transformée de Fourier de $\sigma(x,\xi)$ par rapport à la première variable. Son existence est assurée par le fait que σ est à support compact pour x. $\hat{\sigma}$ est à décroissance rapide en ζ car c'est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact. L'estimation (4) et l'expression $\hat{\sigma}(\zeta,\xi) = \int_U e^{-ix.\zeta}\sigma(x,\xi)dx$ nous donnent donc l'estimation pour $\hat{\sigma}$:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{N}^m \qquad |\partial_\xi^\beta \hat{\sigma}(\zeta,\xi)| \leqslant C_{N,\beta}(1+|\zeta|)^{-N}(1+|\xi|)^{\delta-|\beta|} \tag{5}$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la mesure $|\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\eta$ donne :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)d\eta \right|^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\eta \right) \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \right)$$

Ensuite, en utilisant (5) et le lemme 2.1.6, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\eta \leqslant C_N \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\zeta|)^{-N}(1+|\xi+\zeta|)^\delta d\zeta \leqslant C(1+|\xi|)^\delta$$

en choisissant arbitrairement un N suffisamment grand pour pouvoir appliquer le lemme, et en posant $\zeta = \eta - \xi$ dans l'intégrale. De la même manière (toujours en posant $\zeta = \xi - \eta$ dans l'intégrale) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s-\delta}(1+|\xi|)^\delta |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\xi &\leqslant C_N \left(\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|)^{2s-\delta}(1+|\xi-\eta|)^{-N} d\xi \right)(1+|\eta|)^\delta \\ &\leqslant C(1+|\eta|)^{2s} \leqslant \tilde{C}(1+|\eta|^2)^s \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} \|A_\sigma u\|_{s-\delta}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\frac{d\eta}{(2\pi)^m} \right|^2 d\xi \\ &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s-\delta} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\eta \right)}_{\leqslant C(1+|\xi|)^\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \right) d\xi \\ &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{u}(\eta)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s-\delta}(1+|\xi|)^\delta |\hat{\sigma}(\xi-\eta,\eta)|d\xi \right) d\eta \\ &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta = C\|u\|_s^2 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 2.1.8 *(composition)*
Soit A et B des opérateurs pseudo-différentiels de symbole respectif $a \in S_c^k(U)$ et $b \in S_c^l(U)$. Alors le composé AB est un opérateur pseudo-différentiel admettant un symbole $a \diamond b \in S_c^{k+l}(U)$ tel que $a \diamond b - ab \in S_c^{k+l-1}(U)$.

Démonstration : Soit $u \in \mathcal{D}(U)$. Par un calcul identique à celui de la démonstration précédente :

$$\widehat{Bu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{b}(\xi - \eta, \eta)\hat{u}(\eta)\frac{d\eta}{(2\pi)^m}$$

et donc

$$ABu(x) = \int e^{ix.\eta} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.(\xi-\eta)}a(x,\xi)\hat{b}(\xi-\eta,\eta)\frac{d\xi}{(2\pi)^m}\right)}_{= \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\zeta}a(x,\eta+\zeta)\hat{b}(\zeta,\eta)\frac{d\zeta}{(2\pi)^m}} \hat{u}(\eta)d\eta$$

On note pour la suite $c(x,\eta)$ l'élément sous l'accolade. On va montrer que c'est un symbole d'ordre $k+l$. En utilisant les estimations (4) et (5) et en appliquant la règle de Leibnitz, on obtient pour tout α, β et N :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta (a(x,\eta+\zeta)\hat{b}(\zeta,\eta))| \leqslant C_{N,\alpha,\beta}(1+|\eta+\zeta|)^{k-|\beta|}(1+|\eta|)^{l-|\beta|}(1+|\zeta|)^{-N}$$

ce qui nous assure avec le lemme 2.1.6 que $c \in S_c^{k+l}(U)$. Enfin, en écrivant le développement de Taylor de a :

$$\begin{aligned} c(x,\eta) &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\zeta}\left(a(x,\eta) + \sum_{|\gamma|=1}\zeta^\gamma \int_0^1 (1-t)\partial^\gamma a(x,\eta+t\zeta)dt\right)\hat{b}(\zeta,\eta)\frac{d\zeta}{(2\pi)^m} \\ &= a(x,\eta)b(x,\eta) + \int_0^1 (1-t)\left(\sum_{|\gamma|=1}\int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\zeta}\zeta^\gamma\partial^\gamma a(x,\eta+t\zeta)d\zeta\right)dt \end{aligned}$$

et on en déduit toujours en utilisant les estimations et le lemme que $c - ab \in S_c^{k+l-1}(U)$.

Généralisation aux fibrés vectoriels On va procéder de la même manière que pour les espaces de Sobolev : on va utiliser un recouvrement fini et une partition de l'unité qui lui sera reliée. Précisément, soit M une variété différentiable compacte de classe C^∞ ($\dim_{\mathbb{R}} M = m$), E et F des fibrés vectoriels holomorphes sur M de rang r et r' respectivement. Les éléments de $S_c^\delta(M;E,F)$ sont les fonctions

$$(x,\xi) \in T_M^* \longmapsto \sigma(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$$

vérifiant l'estimation (4) dans tout système de coordonnées (elles sont automatiquement à support compact pour la variable x). On considère alors (U_j) un recouvrement fini de M par des ouverts de cartes trivialisants, et (ψ_j) une partition de l'unité. On définit alors, pour $u \in C^\infty(M,E)$:

$$A_\sigma(u) = \sum \psi_j A_\sigma(\psi_j u)$$

de manière à réduire les calculs à la situation de $\mathbb{R}^m$. Tous les résultats qui ont été établis au paragraphe 2.1.3 s'étendent au cas des fibrés vectoriels.

2.2 Etude des opérateurs elliptiques

Dans tout ce paragraphe, on considère M une variété compacte orientée de dimension m et de classe C^∞, munie d'une forme volume dV. On suppose que $E \to M$ et $F \to M$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens de rang r et r' respectivement.

2.2.1 Premières propriétés

Définition 2.2.1 *(opérateur elliptique)*
Un opérateur différentiel P est dit elliptique si son symbole principal $\sigma_P(x,\xi) \in Hom(E_x, F_x)$ est injectif pour tout $x \in M$ et $\xi \in T^*_{M,x} \setminus \{0\}$.
Un opérateur pseudo-différentiel A_σ de degré δ est dit elliptique s'il peut-être défini par un symbole $\sigma \in S^\delta_c(M; E, F)$ tel que pour tout $(x,\xi) \in T^*_M$ et tout $u \in E_x$ on ait : $|\sigma(x,\xi).u| \geqslant c|\xi|^\delta |u|$ (pour $|\xi|$ assez grand et uniformément pour $x \in M$).

Pour un opérateur différentiel de degré δ, être elliptique en tant qu'opérateur différentiel et être elliptique en tant qu'opérateur pseudo-différentiel sont deux conditions équivalentes car le symbole principal est homogène de degré δ.
Par ailleurs, si E et F sont de même rang, un opérateur différentiel P est elliptique si et seulement si $\sigma_P(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$. Dès lors, la formule (3) montre que P est elliptique si et seulement si P^* est elliptique.

Théorème 2.2.2 *On suppose que E et F sont de même rang. Soit $A : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur pseudo-différentiel elliptique.*
Il existe $\tilde{A} : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,E)$ opérateur pseudo-différentiel tel que $\tilde{A}A = I_{C^\infty(M,E)} + R$ et $A\tilde{A} = I_{C^\infty(M,F)} + R'$, où R et R' sont des opérateurs pseudo-différentiels de degré au plus -1 (on parle d'opérateur régularisants).

Démonstration : considérons $\sigma \in S^\delta_c(M; E, F)$ un symbole définissant A et vérifiant la propriété de la définition 2.2.1. Il est inversible, car E et F sont de même rang. On va prouver que $\sigma^{-1} \in S^{-\delta}_c(M; F, E)$. On démontre qu'il vérifie l'estimation (4) par récurrence sur $|\beta|$:

- pour $|\beta| = 0$, il s'agit de voir :

$$\forall (x,\xi) \in T^*_M \qquad |\sigma^{-1}(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-\delta}$$

  C'est immédiat avec la propriété d'ellipticité vérifiée par σ.
- pour $|\beta| > 1$, la formule de Leibnitz donne pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$ quelconque :

$$\sigma(x,\xi) D^\alpha_x D^\beta_\xi (\sigma(x,\xi)^{-1}) = \\ - \sum_{(\alpha_1,\beta_1)<(\alpha,\beta)} \binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1} \left(D^{\alpha_1}_x D^{\beta_1}_\xi \sigma(x,\xi)\right)\left(D^{\alpha-\alpha_1}_x D^{\beta-\beta_1}_\xi \sigma(x,\xi)^{-1}\right)$$

  et donc, en tenant compte des estimations suivantes :

$$|\sigma(x,\xi).u| \geqslant C|\xi|^\delta |u| \quad \text{(par ellipticité)}$$
$$\left|D^{\alpha_1}_x D^{\beta_1}_\xi \sigma(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha_1,\beta_1}(1+|\xi|)^{\delta-|\beta_1|} \quad \text{(d'après les estimations (4))}$$
$$\left|D^{\alpha-\alpha_1}_x D^{\beta-\beta_1}_\xi \sigma(x,\xi)^{-1}\right| \leqslant C'_{\alpha_1,\beta_1}(1+|\xi|)^{-\delta-|\beta|+|\beta_1|} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

  on obtient l'estimation que l'on voulait pour prouver $\sigma(x,\xi)^{-1} \in S^{-\delta}_c(M; F, E)$.

On considère alors $\tilde{A}$ l'opérateur pseudo-différentiel défini par le symbole σ^{-1}. D'après le théorème 2.1.8 de composition, $\tilde{A}A - I_{C^\infty(M,E)}$ et $A\tilde{A} - I_{C^\infty(M,F)}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels de degré inférieur à -1, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 2.2.3 *(régularité des opérateurs elliptiques)*
Soit P un opérateur différentiel elliptique entre les fibrés E et F. Si $\xi \in W^s(M,E)$ est telle que $P\xi \in C^\infty(M,F)$, alors $\xi \in C^\infty(M,E)$.

Démonstration : on considère $\tilde{P}$ opérateur pseudo-différentiel tel que $\tilde{P}P - I = R$ soit un opérateur pseudo-différentiel de degré inférieur à -1. Alors

$$\xi = \tilde{P}P\xi - R\xi$$

où $\tilde{P}P\xi \in C^\infty(M,E)$ car $P\xi \in C^\infty(M,F)$, et $R\xi \in W^{s+1}(M,E)$ car R est de degré inférieur à -1. Donc $\xi \in W^{s+1}(M,E)$. On en déduit que ξ est dans $W^k(M,E)$ pour k arbitrairement grand, et donc dans $C^\infty(M,E)$ grâce aux inclusions de Sobolev (théorème 2.1.3).

2.2.2 Un théorème de finitude

On s'attache dans tout ce paragraphe à démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *Soit M une variété compacte orientée de dimension m et de classe C^∞, E et F des fibrés vectoriels hermitiens de même rang r et soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ. Alors :*
- $\ker P$ *est de dimension finie*
- $P(C^\infty(M,E))$ *est fermé et de codimension finie dans* $C^\infty(M,F)$ *; si* P^* *est l'adjoint formel de* P*, il existe une décomposition comme somme directe orthogonale dans* $W^0(M,F)$ *:*

$$C^\infty(M,F) = P(C^\infty(M,E)) \oplus \ker P^*$$

Lemme 2.2.5 *Soit $R : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un opérateur régularisant (*i.e. *un opérateur pseudo-différentiel de degré -1). Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ le prolongement $\tilde{R} : W^s(M,E) \to W^s(M,E)$ fourni par le théorème 2.1.7 est un opérateur linéaire compact.*

Preuve : Soit $s \in \mathbb{R}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
W^s(M,E) \arrow[rr, "\tilde{R}"] \arrow[dr, "R_s"'] & & W^s(M,E) \\
& W^{s+1}(M,E) \arrow[ur, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

où R_s est le prolongement continu de R fourni par le théorème de prolongement, et j l'injection compacte fournie par le théorème de Rellich. $\tilde{R}$ est alors compact comme composé d'un opérateur continu et d'un opérateur compact.

Proposition 2.2.6 *Soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ. Pour $s \in \mathbb{R}$ on note P_s son prolongement $W^s(M,E) \to W^{s-\delta}(M,F)$. Alors :*
- $\forall s \in \mathbb{R}, \ker P_s \subset C^\infty(M,E)$ *et donc* $\ker P_s = \ker P$
- $\forall s \in \mathbb{R}, \dim \ker P_s < \infty$ *et* $\dim W^{s-k}(M,F)/P_s(W^s(M,E)) < \infty$

Démonstration : On considère $\tilde{P} : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,E)$ tel que $P\tilde{P}-I$ et $\tilde{P}P-I$ soient des opérateurs régularisants (théorème 2.2.2). Alors, en combinant le lemme 2.2.5 et le théorème 5.1.3 on obtient que les prolongements continus $W^s(M,E) \to W^s(M,E)$ et $W^s(M,F) \to W^s(M,F)$ obtenus pour tout s pour $\tilde{P}P$ et $P\tilde{P}$ respectivement sont tels que leur noyau et leur conoyau respectifs sont de dimension finie.
Comme on a $\ker P_s \subset \ker(\tilde{P}P)_s$ et que ce dernier est de dimension finie, on a bien $\dim \ker P_s < \infty$. On a de la même manière $\dim \operatorname{coker} P_s < \infty$.
Enfin, le fait que $\ker P_s \subset C^\infty(M,E)$ provient du théorème de régularité des opérateurs elliptiques.

Lemme 2.2.7 *Soit H_1 et H_2 des espaces de Hilbert, $L : H_1 \to H_2$ linéaire et continu, dont le conoyau est de dimension finie.*
Alors l'image $L(H_1)$ est fermée.

Preuve : on peut supposer L injectif, quitte à remplacer H_1 par $H_1/\ker L$ ($\ker L$ est fermé par continuité, donc cela ne pose pas de problème : $H_1/\ker L \simeq (\ker L)^\perp$).
Ensuite, on considère un sous-espace V de H_2 isomorphe au conoyau $H_2/L(H_1)$. Il est de dimension finie, donc fermé. Ainsi, en notant W l'orthogonal de V, on a

$$H_2 = V \oplus W$$

On a donc une projection continue $p : H_2 \to W$. Le composé $p \circ L : H_1 \to W$ est alors continu et bijectif. D'après le corollaire 5.1.2 au théorème de l'application ouverte, c'est un homéomorphisme (W est un Banach en tant que sous-espace fermé d'un espace de Hilbert).
$L(H_1)$ et W sont ainsi homéomorphes, *via* les applications continues

$$L(H_1) \xrightarrow{p_{|L(H)}} W \quad \text{et} \quad W \xrightarrow{(p\circ L)^{-1}} H_1 \xrightarrow{L} L(H_1)$$

Comme W est fermé, $L(H_1)$ est fermé.

Proposition 2.2.8 *Soit $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ un opérateur différentiel elliptique de degré δ, et soit $\tau \in (\ker P^*)^\perp \cap C^\infty(M,F)$ (l'orthogonal est pris dans $W^0(M,F)$).*
Alors il existe un unique $\xi \in C^\infty(M,E) \cap (\ker P)^\perp$ tel que $P\xi = \tau$ (l'orthogonal étant pris cette fois dans $W^0(M,E)$).

Démonstration : on sait que

$$\overline{P_\delta(W^\delta(M,E))}^\perp = \ker P_\delta^* \quad (\textit{dans } W^0(M,F))$$

(où $P_\delta : W^\delta(M,E) \to W^0(M,F)$ est le prolongement continu de P). Donc $P_\delta(W^\delta(M,E))$ est dense dans $(\ker P_\delta^*)^\perp$.
D'après la proposition 2.2.6, le conoyau de P_δ est de dimension finie. Donc d'après le lemme 2.2.7, son image est fermée. Alors on a :

$$P_\delta(W^\delta(M,E)) = (\ker P_\delta^*)^\perp$$

Ainsi, l'équation $P\xi = \tau$ admet des solutions dans $W^\delta(M,E)$. En projetant orthogonalement par rapport au fermé $\ker P_\delta$ (qui est égal à $\ker P$ d'après la proposition 2.2.6), on obtient que l'équation admet une unique solution orthogonale à $\ker P$ dans $W^\delta(M,E)$. Elle est automatiquement C^∞ par le théorème de régularité des opérateurs elliptiques ($\tau \in C^\infty(M,F)$).

Finalement, la proposition 2.2.6 nous donne la première partie du théorème et le fait que le conoyau est de dimension finie, et la proposition 2.2.8 donne la décomposition orthogonale dans $W^0(M,F)$. Le théorème est donc démontré.

2.3 Géométrie différentielle

2.3.1 Connexions

Généralités Soit E un fibré vectoriel complexe de rang r sur une variété compacte différentiable M de classe C^∞. Une connexion D sur E est un opérateur linéaire différentiel d'ordre 1

$$D : C^\infty(M, \Lambda^q T_M^* \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{q+1} T_M^* \otimes E)$$

satisfaisant la règle de Leibnitz

$$\forall f \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^*) \quad \forall u \in C^\infty(M, \Lambda^q T_M^* \otimes E) \quad D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^{\deg f} f \wedge Du$$

Sur un ouvert $\Omega \subset M$ où E admet une trivialisation τ, une connexion D peut s'écrire

$$Du \simeq_\tau du + \Gamma \wedge u$$

où $\Gamma \in C^\infty(\Omega, \Lambda^1 T_M^* \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r))$ est une matrice arbitraire de 1-formes et où d agit composante par composante sur le vecteur colonne u.

Supposons maintenant que E soit muni d'une métrique hermitienne de classe C^∞. On a alors un accouplement sesquilinéaire canonique

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(M, \Lambda^p T_M^* \otimes E) \times C^\infty(M, \Lambda^q T_M^* \otimes E) & \longrightarrow & C^\infty(M, \Lambda^{p+q} T_M^*) \\ (u, v) & \longmapsto & \{u, v\} \end{array}$$

En effet, si sur un ouvert de carte trivialisant, on a une base (e_λ) de $C^\infty(M, E)$, et $u = \sum u_\lambda \otimes e_\lambda$, $v = \sum v_\lambda \otimes e_\lambda$ on définit localement

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\mu} u_\lambda \wedge \bar{v}_\mu < e_\lambda, e_\mu > \tag{6}$$

Pour avoir une définition globale, on utilise un recouvrement fini par des ouverts de carte trivialisants, et une partition de l'unité qui lui est reliée.
La connexion est dite hermitienne si elle vérifie

$$d\{u, v\} = \{Du, v\} + (-1)^{\deg u}\{u, Dv\} \tag{7}$$

Cas des variétés complexes On suppose ici que la variété de base M est munie d'une structure complexe. Dans ce cas, on peut décomposer la différentielle extérieure d en la somme $d' + d''$ d'une $(1,0)$-forme et d'une $(0,1)$-forme respectivement :

$$\begin{aligned} d'u &= \sum_{|I|=p, |J|=q, 1 \leqslant k \leqslant m} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ d''u &= \sum_{|I|=p, |J|=q, 1 \leqslant k \leqslant m} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

Une connexion D peut être scindée de manière unique comme somme d'une $(1,0)$-connexion et d'une $(0,1)$-connexion, $D = D' + D''$. Dans une trivialisation locale τ par un répère C^∞ :

$$\begin{aligned} D'u &\simeq_\tau d'u + \Gamma' \wedge u \\ D''u &\simeq_\tau d''u + \Gamma'' \wedge u \end{aligned}$$

où $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ est exprimée comme la somme d'une matrice de $(1,0)$-formes et d'une autre de $(0,1)$-formes. En tenant compte du fait que la différentielle extérieure est clairement une connexion hermitienne, on obtient en remplaçant dans (7) que D est hermitienne si et seulement si pour u et v quelconques dans $C^\infty(M, \Lambda^q T_M^* \otimes E)$ et $C^\infty(M, \Lambda^p T_M^* \otimes E)$ respectivement :

$$\{(\Gamma' + \Gamma'') \wedge u, v\} + (-1)^{\deg u}\{u, (\Gamma' + \Gamma'') \wedge v\} = 0$$

Si on suppose la base (e_λ) orthonormée, et si on note $\Gamma = (\gamma_{\lambda\mu})_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r}$ la matrice de Γ dans cette base, cela s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_\mu \left(\sum_\lambda \gamma_{\mu\lambda}\wedge u_\lambda\right)\otimes e_\mu, \sum_\mu v_\mu\otimes e_\mu\right\} + (-1)^{\deg u}\left\{\sum_\mu u_\mu\otimes e_\mu, \sum_\mu\left(\sum_\lambda \gamma_{\mu\lambda}\wedge v_\lambda\right)\otimes e_\mu\right\}\\
&= \sum_{\lambda,\mu}\gamma_{\mu\lambda}\wedge u_\lambda\wedge\bar{v}_\mu + (-1)^{\deg u}\sum_{\lambda,\mu} u_\mu\wedge\bar{\gamma}_{\mu\lambda}\wedge\bar{v}_\lambda\\
&= \sum_{\lambda,\mu}(\gamma_{\mu\lambda}+\bar{\gamma}_{\lambda\mu})\wedge u_\lambda\wedge\bar{v}_\mu\\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement, en écrivant $\Gamma' = (\gamma'_{\lambda\mu})$ matrice de $(1,0)$-formes et $\Gamma'' = (\gamma''_{\lambda\mu})$ matrice de $(0,1)$-formes

$$\forall\lambda,\mu \quad \gamma'_{\mu\lambda} + \bar{\gamma}''_{\lambda\mu} = 0$$

Autrement dit, la connexion D est hermitienne si et seulement si $\Gamma' = -(\Gamma'')^*$ relativement à tout repère orthonormé. Par conséquent, si on fixe une $(0,1)$-connexion D'', il existe une unique connexion hermitienne qui lui est associée.

Connexion de Chern On conserve les hypothèses du paragraphe précédent, et on suppose en plus que le fibré E possède lui-même une structure holomorphe. Dans ces conditions, on définit naturellement l'opérateur d'' agissant sur $C^\infty(M, \Lambda^{p,q}T_M^*\otimes E)$ par la formule, pour $s = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant r} s_\lambda\otimes e_\lambda$ exprimée dans un repère holomorphe local de E :

$$d''s = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant r} d''s_\lambda\otimes e_\lambda$$

Il s'agit d'une définition convenable, car le repère (e_λ) étant holomorphe, les matrices de transition mises en jeu dans un changement de repère sont holomorphes, et ne perturbent pas le calcul de d''.

On appelle connexion de Chern l'unique connexion hermitienne dont la composante D'' est l'opérateur d'' défini ci-dessus. Si on se donne localement un repère holomorphe (e_λ) et une matrice hermitienne $H = (h_{\lambda\mu})$ donnant la métrique :

$$\{u,v\} = \sum_{\lambda,\mu} h_{\lambda\mu}u_\lambda\wedge\bar{v}_\mu = u^\dagger\wedge H\bar{v}$$

et alors, en utilisant les relations $\overline{H}^\dagger = H$ et $dH = d'H + \overline{d'\overline{H}}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
d\{u,v\} &= (du)^\dagger\wedge H\bar{v} + (-1)^{\deg u}u^\dagger\wedge(dH\wedge\bar{v} + H\overline{dv})\\
&= (du + \overline{H}^{-1}d'\overline{H}\wedge u)^\dagger\wedge H\bar{v} + (-1)^{\deg u}u^\dagger\wedge H\overline{(dv+\overline{H}^{-1}d'\overline{H}\wedge v)}
\end{aligned}$$

et ainsi la connexion de Chern est la connexion hermitienne définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} Du \simeq_\tau du + \overline{H}^{-1}d'\overline{H}\wedge u\\ D'u \simeq_\tau d'u + \overline{H}^{-1}d'\overline{H}\wedge u = \overline{H}^{-1}d'(\overline{H}u), \qquad D'' = d''\end{array}\right.$$

En particulier, $D'^2 = D''^2 = 0$, et par conséquent $D^2 = D'D'' + D''D'$.

2.3.2 Structure euclidienne de l'algèbre extérieure

On considère ici une variété riemannienne orientée de classe C^∞, et $E \to M$ un fibré vectoriel hermitien de rang r sur M. On se donne $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ des repères orthonormés de T_M et E respectivement, sur une carte $\Omega \subset M$. On note $(\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)$ et $(e_1^*, \ldots, e_r^*)$ les repères duaux correspondants, et on appelle dV l'élément de volume riemannien sur M.
On munit de manière naturelle l'algèbre extérieure ΛT_M^* d'un produit scalaire $< . , . >$ en posant

$$\forall u_j, v_k \in T_M^* \qquad < u_1 \wedge \ldots \wedge u_p \;, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p >= \det(< u_j \;, v_k >)_{1 \leqslant j,k \leqslant p}$$

pour tout p, et on dispose de la décomposition en somme orthogonale $\Lambda T_M^* = \bigoplus_{p \geqslant 0} \Lambda^p T_M^*$. La famille de covecteurs $\xi_I^* = \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_p}, i_1 < \ldots < i_p$ définit une base orthonormée de ΛT_M^*. On notera $< . , . >$ également le produit scalaire correspondant sur $\Lambda T_M^* \otimes E$.

Définition 2.3.1 *(opérateur étoile de Hodge)*
L'opérateur $\star$ de Hodge-Poincaré-De Rham est l'endomorphisme de ΛT_M^* défini par la collection d'applications linéaires $\star : \Lambda^p T_M^* \to \Lambda^{m-p} T_M^*$ telle que pour tout p :

$$\forall u, v \in \Lambda^p T_M^* \quad u \wedge \star v =< u, v > dV$$

Pour justifier l'existence et l'unicité de cet opérateur, on utilise l'accouplement de dualité

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^p T_M^* \times \Lambda^{m-p} T_M^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & u \wedge v / dV = \sum_I \varepsilon(I, \complement I) u_I v_{\complement I} \end{array}$$

où l'on a décomposé $u = \sum_{|I|=p} u_I \xi_I^*$ et $v = \sum_{|J|=m-p} v_J \xi_J^*$, et où $\varepsilon(I, \complement I)$ est la signature de la permutation $(1, \ldots, m) \mapsto (I, \complement I)$. Il apparaît alors clairement :

$$\forall v \in \Lambda^p T_M^* \qquad \star\, v = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I, \complement I) v_I \xi_{\complement I}^*$$

Plus généralement, l'accouplement sesquilinéaire $\{.,.\}$ défini par (6) induit la définition d'un opérateur $\star$ sur les formes à valeurs vectorielles, tel que

$$\begin{array}{ll} \star : \Lambda^p T_M^* \otimes E \longrightarrow \Lambda^{m-p} T_M^* \otimes E & \{s, \star t\} =< s, t > dV \\ \star\, t = \sum_{|I|=p,\lambda} \varepsilon(I, \complement I) t_{I,\lambda} \xi_{\complement I}^* \otimes e_\lambda & \forall s, t \in \Lambda^p T_M^* \otimes E \end{array}$$

pour $t = \sum_{|I|=p,\lambda} t_{I,\lambda} \xi_I^* \otimes e_\lambda$. Un dénombrement facile donne $\varepsilon(I, \complement I)\varepsilon(\complement I, I) = (-1)^{p(m-p)} = (-1)^{p(m-1)}$, et donc

$$\star\star\;\; t = (-1)^{p(m-1)} t \qquad t \in \Lambda^p T_M^* \otimes E$$

$\star$ est une isométrie de $\Lambda^p T_M^* \otimes E$.
Nous aurons par la suite besoin également d'une variante de $\star$, à savoir l'opérateur antilinéaire

$$\sharp : \Lambda^p T_M^* \otimes E \longrightarrow \Lambda^{m-p} T_M^* \otimes E^*$$

défini par la relation $s \wedge \sharp t =< s, t > dV$, où le produit extérieur est combiné avec l'accouplement canonique $E \times E^* \to \mathbb{C}$. Nous avons :

$$\sharp\; t = \sum_{|I|=p,\lambda} \varepsilon(I, \complement I) \bar{t}_{I,\lambda} \xi_{\complement I}^* \otimes e_\lambda$$

2.3.3 Contraction par un champ de vecteurs

Etant donné un vecteur tangent $\theta \in T_M$ et une forme $u \in \Lambda^p T_M^*$, la contraction $\theta \lrcorner u \in \Lambda^{p-1} T_M^*$ est définie pour tout $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1} \in T_M$ par la formule

$$\theta \lrcorner u(\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}) = u(\theta, \eta_1, \ldots, \eta_{p-1})$$

Si on se donne $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ une base de T_M alors on les formules pour l'opérateur bilinéaire $. \lrcorner .$:

$$\xi_l \lrcorner (\xi_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge \xi_{i_p}^*) = \begin{cases} 0 & si\ l \notin \{i_1, \ldots i_p\} \\ (-1)^{k-1} \xi_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge \widehat{\xi_{i_k}^*} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_p}^* & si\ l = i_k \end{cases}$$

On montre alors aisément en utilisant cette formule et la bilinéarité de $. \lrcorner .$ (avec des notations évidentes) :

- $\theta \lrcorner (u \wedge v) = (\theta \lrcorner u) \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge (\theta \lrcorner v)$
- si $\tilde{\theta} = < . , \theta > \in T_M^*$, alors : $< \theta \lrcorner u, v > = < u, \tilde{\theta} \wedge v >$

2.4 Théorie de Hodge

2.4.1 Opérateurs de Laplace-Beltrami

Soit M une variété riemannienne orientée de classe C^∞, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$, E un fibré vectoriel hermitien sur M, D_E une connexion hermitienne sur E. On considère l'espace de Hilbert $L^2(M, \Lambda^p T_M^* \otimes E)$ des p-formes sur M, à valeurs dans E, muni du produit scalaire $\ll s, t \gg = \int_M < s, t > dV$ (ici $< s, t >$ est le produit scalaire ponctuel sur $\Lambda^p T_M^* \otimes E$ associé au produit scalaire riemannien sur $\Lambda^p T_M^*$ et au produit scalaire hermitien sur E, comme précédemment).

Théorème 2.4.1 *L'adjoint formel de D_E agissant sur $C^\infty(M, \Lambda^p T_M^* \otimes E)$ est donné par*

$$D_E^* = (-1)^{mp+1} \star D_E \star$$

Démonstration : On considère $s \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^* \otimes E)$ et $t \in C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T_M^* \otimes E)$ à support compact. Alors on peut intégrer par parties

$$\begin{aligned} \ll D_E s, t \gg &= \int_M < D_E s, t > dV = \int_M \{D_E s, \star t\} \\ &= \int_M d\{s, \star t\} - (-1)^p \{s, D_E \star t\} = (-1)^{p+1} \int_M \{s, D_E \star t\} \end{aligned}$$

par la formule de Stokes. Mais alors, on a

$$\ll D_E s, t \gg = (-1)^{p+1} (-1)^{p(m-1)} \int_M \{s, \star \star D_E \star t\} = (-1)^{mp+1} \ll s, \star D_E \star t \gg$$

ce qui donne le résultat.

Définition 2.4.2 *L'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opérateur différentiel du second ordre agissant sur les fibrés $\Lambda^p T_M^* \otimes E$ tel que*

$$\Delta_E = D_E D_E^* + D_E^* D_E$$

Il est clairement autoadjoint. On va calculer son symbole. Si f est une fonction de classe C^∞, on a par la formule de Leibnitz pour les connexions $e^{-tf}D_E(e^{tf}s) = tdf \wedge s + D_E s$. Ainsi, par définition du symbole principal

$$\forall (x,\xi) \in T_M^* \quad \forall s \in \Lambda^p T_M^* \otimes E \qquad \sigma_{D_E}(x,\xi)s = \xi \wedge s$$

La formule pour l'adjoint (3) donne alors $\sigma_{D_E^*} = -(\sigma_{D_E})^*$, donc avec ce qu'on a vu sur les contractions, on en déduit

$$\sigma_{D_E^*}(x,\xi) = -\tilde{\xi} \lrcorner s$$

où $\tilde{\xi}$ est le vecteur tangent adjoint de ξ. Alors l'égalité $\sigma_{\Delta_E} = \sigma_{D_E}\sigma_{D_E^*} + \sigma_{D_E^*}\sigma_{D_E}$ pour les symboles principaux donne $\sigma_{\Delta_E}(x,\xi)s = -\xi \wedge (\tilde{\xi} \lrcorner s) - \tilde{\xi} \lrcorner (\xi \wedge s) = -(\tilde{\xi} \lrcorner \xi)s$ et donc pour finir

$$\sigma_{\Delta_E}(x,\xi)s = -|\xi|^2 s$$

En particulier, Δ_E est toujours un opérateur elliptique.

2.4.2 Formes harmoniques et isomorphisme de Hodge

Soit E un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne compacte (M,g). On suppose que E possède une connexion D_E telle que $D_E^2 = 0$ (un exemple fondamental est bien entendu le fibré trivial $E = M \times \mathbb{C}$ avec la connexion $D_E = d$). Avec cette hypothèse, D_E définit un complexe de De Rham généralisé

$$C^\infty(M,E) \xrightarrow{D_E} C^\infty(M,\Lambda^1 T_M^* \otimes E) \xrightarrow{D_E} \cdots \xrightarrow{D_E} C^\infty(M,\Lambda^p T_M^* \otimes E) \xrightarrow{D_E} \cdots$$

pour lequel on notera $H_{DR}^p(M,E)$ les groupes de cohomologie.

L'espace des formes harmoniques de degré p relativement à l'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par

$$\mathcal{H}^p(M,E) = \{s \in C^\infty(M,\Lambda^p T_M^* \otimes E)\ ; \Delta_E s = 0\}$$

Comme on a la relation $\ll \Delta_E s, s \gg = \|D_E s\|^2 + \|D_E^* s\|^2$, on voit que $\Delta_E s = 0$ si et seulement si $D_E s = D_E^* s = 0$.

Théorème 2.4.3 *Pour tout p, il existe une décomposition orthogonale*

$$C^\infty(M,\Lambda^p T_M^* \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus im\ D_E \oplus im\ D_E^*$$

où bien sûr $im\ D_E = D_E(C^\infty(M,\Lambda^{p-1}T_M^* \otimes E))$ et $im\ D_E^* = D_E^*(C^\infty(M,\Lambda^{p+1}T_M^* \otimes E))$.

Démonstration : avec la remarque qu'on a faite que $\Delta_E s = 0$ si et seulement si $D_E s = D_E^* s = 0$, on a le fait que $\mathcal{H}^p(M,E)$ est orthogonal aux deux sous-espaces im D_E et im D_E^*. L'orthogonalité de ces deux sous-espaces entre eux est donnée par la relation $D_E^2 = 0$.

On va alors appliquer le théorème 2.2.4 de finitude à l'opérateur elliptique $\Delta_E = \Delta_E^*$ agissant sur les p-formes (*i.e.* en fait l'opérateur différentiel $\Delta_E : C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,F)$ où F est le fibré $\Lambda^p T_M^* \otimes E$) :

$$C^\infty(M,\Lambda^p T_M^* \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \Delta_E(C^\infty(M,\Lambda^p T_M^* \otimes E))$$

où l'on remarque que im $\Delta_E \subset$ im $D_E +$im D_E^*. Comme d'autre part ces deux sous-espaces sont orthogonaux à $\mathcal{H}^p(M,E)$, ils sont contenus dans im Δ_E, ce qui conclut la preuve du théorème.

Théorème 2.4.4 *(isomorphisme de Hodge)*
Les groupes de cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M,E)$ sont de dimension finie et $H^p_{DR}(M,E) \simeq \mathcal{H}^p(M,E)$.

Démonstration : grâce à la décomposition du théorème 2.4.3, on a

$$\begin{aligned} B^p_{DR}(M,E) &= D_E(C^\infty(M,\Lambda^{p-1}T^*_M \otimes E)) \\ Z^p_{DR}(M,E) &= \ker D_E = (\mathrm{im}\ D^*_E)^\perp = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \mathrm{im}\ D_E \end{aligned}$$

Ceci montre que toute classe de cohomologie de De Rham contient un unique représentant harmonique. Comme $\mathcal{H}^p(M,E)$ est de dimension finie d'après le théorème 2.2.4, le théorème est démontré.

2.4.3 Dualité de Poincaré

Théorème 2.4.5 *L'accouplement*

$$H^p_{DR}(M,E) \times H^{m-p}_{DR}(M,E^*) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (s,t) \longmapsto \int_M s \wedge t$$

est une forme bilinéaire non dégénérée, et définit donc une dualité entre $H^p_{DR}(M,E)$ et $H^{m-p}_{DR}(M,E^*)$.

Démonstration : il existe une connexion D_{E^*} telle que $(D_{E^*})^2 = 0$ naturellement définie telle pour tout $s \in C^\infty(M,\Lambda T^*_M \otimes E)$, $t \in C^\infty(M,\Lambda T^*_M \otimes E^*)$ on ait

$$d(s \wedge t) = (D_E s) \wedge t + (-1)^{\deg s} s \wedge D_{E^*} t$$

Dès lors, grâce à la formule de Stokes on peut factoriser l'application bilinéaire $(s,t) \mapsto \int_M s \wedge t$.

Soit $s \in C^\infty(M,\Lambda^p T^*_M \otimes E)$. Avec des raisonnements analogues à ceux de la preuve du théorème 2.4.1, on montre les formules suivantes :

$$D_{E^*}(\sharp s) = (-1)^p \sharp D^*_E s, \quad (D_{E^*})^*(\sharp s) = (-1)^{p+1} \sharp D_E s, \quad \Delta_{E^*}(\sharp s) = \sharp \Delta_E s$$

et par conséquent, $\sharp s \in \mathcal{H}^{m-p}(M,E^*)$ si et seulement si $s \in \mathcal{H}^p(M,E)$. Comme d'autre part

$$\int_M s \wedge \sharp s = \int_M |s|^2 dV = \|s\|^2$$

on voit que l'accouplement de Poincaré a un noyau trivial dans le facteur de gauche $\mathcal{H}^p(M,E) \simeq H^p_{DR}(M,E)$. Par symétrie, il a aussi un noyau trivial à droite, donc la preuve est achevée.

2.4.4 Dualité de Serre

Soit (X,ω) une variété hermitienne compacte et E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r sur X. Nous noterons D_E la connexion de Chern de E, $D^*_E = -\star D_E \star$ l'adjoint formel de D_E, et D'^*_E, D''^*_E les composantes de D^*_E de type $(-1,0)$ et $(0,-1)$. On montre de la même manière que pour le calcul du symbole du laplacien

$$\sigma_{D''_E}(x,\xi)s = \xi^{0,1} \wedge s, \qquad \xi \in T^*_{X,\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_X,\mathbb{R}), \quad s \in E_x$$

où $\xi^{0,1}$ est la partie de type $(0,1)$ de la 1-forme réelle ξ. Dès lors, le symbole principal de l'opérateur $\Delta''_E = D''_E D''^*_E + D''^*_E D''_E$ est

$$\sigma_{\Delta''_E}(x,\xi)s = -|\xi^{0,1}|^2 s = -\frac{1}{2}|\xi|^2 s$$

(en effet, comme ξ est une forme réelle, $\xi = \sum_i u_i(dz_i + d\bar{z}_i)$ avec u_i à valeurs réelles, donc $|\xi|^2 = 2|\xi^{0,1}|^2$) On peut faire un calcul similaire pour Δ'_E. On trouve en particulier $\sigma_{\Delta'_E} = \sigma_{\Delta''_E} = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_E}$, et Δ''_E est un opérateur elliptique autoadjoint sur chacun des espaces $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*_X \otimes E)$. Puisque $(D''_E)^2 = 0$, on montre exactement de la même manière que pour le théorème 2.4.3 :

Théorème 2.4.6 *Pour tout bidegré (p,q), il existe une décomposition orthogonale*

$$C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*_X \otimes E) = \mathcal{H}^{p,q}(X,E) \oplus im\ D''_E \oplus im\ {D''_E}^*$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ est l'espace des (p,q)-formes Δ''_E-harmoniques.

et de là, toujours en reproduisant le raisonnement du paragraphe précédent, on obtient

Théorème 2.4.7 *(isomorphisme de Hodge)*
Les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ sont de dimension finie, et il y a un isomorphisme

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$$

Théorème 2.4.8 *(dualité de Serre)*
L'accouplement bilinéaire

$$H^{p,q}(X,E) \times H^{m-p,m-q}(X,E^*) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (s,t) \longmapsto \int_X s \wedge t$$

est une dualité non dégénérée.

Démonstration : soient $s_1 \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*_X \otimes E)$, $s_2 \in C^\infty(X, \Lambda^{m-p,m-q-1}T^*_X \otimes E)$. $s_1 \wedge s_2$ est de bidegré $(n, n-1)$, donc

$$d(s_1 \wedge s_2) = d''(s_1 \wedge s_2) = d''s_1 \wedge s_2 + (-1)^{p+q} s_1 \wedge d''s_2$$

et l'accouplement bilinéaire $(s,t) \mapsto \int_X s \wedge t$ se factorise aux groupes de cohomologie de Dolbeault grâce à la formule de Stokes.

Par ailleurs, on a toujours les mêmes formules :

$$\begin{array}{ll} D''_{E^*}(\sharp s) = (-1)^{\deg s}\sharp(D''_E)^* s & (D''_{E^*})^*(\sharp s) = (-1)^{\deg s+1}\sharp {D''_E}^* s \\ \Delta''_{E^*}(\sharp s) = \sharp\Delta''_E s & \end{array}$$

(où D_{E^*} est la connexion de Chern de E^*). On voit donc que l'on a ici encore $s \in \mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ si et seulement si $\sharp s \in \mathcal{H}^{m-p,m-q}(X,E^*)$. On conclut alors quant à la non dégénérescence en constatant que $\int_X s \wedge \sharp s = \|s\|^2$.

3 Le théorème de Riemann-Roch

3.1 Le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}(D)$

Soit X une surface de Riemann compacte. On définit un faisceau d'anneaux sur X en appelant $\mathcal{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U, pour tout U ouvert de X. On définit de manière analogue $\mathcal{M}$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X.

Définition 3.1.1 *L'ensemble des diviseurs de X est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par X. Ainsi, un diviseur D de X s'écrit de manière unique :*

$$D = \sum_{x \in X} n_x x$$

où (n_x) est une suite d'entiers presque nulle. On dit que D est positif si tous les n_x sont positifs. Le degré de D est l'entier

$$\deg D = \sum_{x \in X} n_x$$

Pour tout D diviseur de X, on appelle :

$$\mathcal{O}(D) = \left\{ f \in \mathcal{M}, \quad \sum_{x \in X} (\nu_x(f) + n_x) \geqslant 0 \right\}$$

où $\nu_x(f)$ désigne comme d'habitude la valuation de f au point x.

Pour parler plus prosaïquement, si $D = n_1 x_1 + \cdots + n_d x_d$, $\mathcal{O}(D)$ est l'ensemble des fonctions méromorphes sur X, holomorphes sur l'ouvert $X \setminus \{x_1, \ldots, x_d\}$, et ne divergeant pas plus que $1/(z - x_i)^{n_i}$ en ces points. On définit alors (avec les opérations de restrictions évidentes) le faisceau $\mathcal{O}(D)$ sur X. C'est clairement un $\mathcal{O}$-module.

Proposition 3.1.2 *$\mathcal{O}(D)$ est localement libre de rang 1.*

Démonstration : On note $D = n_1 x_1 + \cdots + n_d x_d$. Soit $x \in X$, $f \in \mathcal{O}(D)(x)$. f est définie sur un certain ouvert autour de x. On considère un tel ouvert U_x, qui ne contienne aucun des x_i (à part, bien sûr, éventuellement x) et tel que l'on ait une coordonnée z définie sur U_x tout entier. On sait alors, quitte à réduire U_x, que f s'écrit de manière unique :

$$f(z) = \frac{\tilde{f}}{(z - x)^{n_x}}$$

où $\tilde{f}$ est une fonction holomorphe sur U_x (pouvant éventuellement s'annuler en x). Une telle écriture prouve évidemment que $\mathcal{O}(D)(x)$ est un $\mathcal{O}(x)$-module libre de rang 1, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3.1.3 $\mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D') = \mathcal{O}(D + D')$

Démonstration : Il suffit de démontrer que les espaces étalés relatifs à chacun des deux faisceaux considérés sont les mêmes (et qu'ils ont la même topologie). Or $\mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D')$ est le faisceau engendré par le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{O}(D)(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}(D')(U)$. On a donc :

$$\left(\mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D')\right)(x) = \mathcal{O}(D)(x) \otimes_{\mathcal{O}(x)} \mathcal{O}(D')(x)$$

et il s'agit de voir :
$$\mathcal{O}(D)(x) \otimes_{\mathcal{O}(x)} \mathcal{O}(D')(x) = \mathcal{O}(D+D')(x)$$
Soit donc $x \in X$. $\mathcal{O}(D)(x)$ et $\mathcal{O}(D')(x)$ sont des $\mathcal{O}(x)$-modules libres de rang 1, engendrés respectivement par $z \mapsto (z-x)^{-n}$ et $z \mapsto (z-x)^{-n'}$ (comme tout se passe localement, on peut se donner une coordonnée z autour du point x). Alors $\mathcal{O}(D)(x) \otimes_{\mathcal{O}(x)} \mathcal{O}(D')(x)$ est de manière évidente le $\mathcal{O}(x)$-module libre de rang 1 engendré par $z \mapsto (z-x)^{-n} \times (z-x)^{-n'}$, *i.e.* $\mathcal{O}(D+D')(x)$.

Définition 3.1.4 *Soit $D = n_1x_1 + \cdots + n_dx_d$ diviseur de X (on suppose les x_i deux à deux distincts), on note $\mathbb{C}_D$ le faisceau défini par :*
$$\mathbb{C}_D : \ U \mapsto \mathbb{C}^{n_1\chi_U(x_1)+\cdots+n_d\chi_U(x_d)}$$
où χ_U est la fonction caractéristique de l'ouvert U.

On a donc :
$$\mathbb{C}_D(x) = \begin{cases} \mathbb{C}^{n_i} & si\ x = x_i \\ 0 & sinon \end{cases}$$
On peut considérer ce faisceau comme un $\mathcal{O}$-module. On va voir comment faire dans le cas où $D = nx$, le cas général s'en déduisant aisément. Il faut alors alors voir $\mathbb{C}_D$ comme étant le faisceau qui à un ouvert U de X associe 0 si $x \notin U$, et l'ensemble des n-uplets correspondants aux premiers termes du développement en série entière au voisinnage de x d'une fonction holomorphe sur U sinon.

Proposition 3.1.5 $\mathcal{O}(D') \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}_D \simeq \mathbb{C}_D$

Démonstration : $\mathcal{O}(D')$ est localement libre de rang 1, donc en regardant au niveau des espaces étalés, on obtient :
$$\mathcal{O}(D')(x) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C}_D(x) \simeq \mathbb{C}_D(x)$$
ce qui donne le résultat.

Proposition 3.1.6 *Si D est un diviseur positif de X, on a les suites exactes :*
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow 0$$

Démonstration : pour la première suite exacte, il suffit de montrer pour tout $x \in X$ que :
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D)(x) \longrightarrow \mathcal{O}(x) \longrightarrow \mathbb{C}_D(x) \longrightarrow 0$$
est une suite exacte. On écrit $D = n_1x_1 + \cdots n_dx_d$, en suposant les x_i deux à deux distincts. Alors, de deux choses l'une, ou bien $x = x_{i_0}$ pour un certain i_0, et $\mathcal{O}(-D)(x)$ est l'ensemble des fonctions définies localement autour de x, holomorphe autour de x, et admettant x comme zero d'ordre au moins n_{i_0}, ou bien $\mathcal{O}(-D)(x)$ est simplement l'ensemble des fonctions holomorphes définies localement autour de x. Dans les deux cas, on n'a aucun mal à exhiber une injection de $\mathcal{O}(-D)(x)$ dans $\mathcal{O}(x)$.

Pour obtenir une surjection de $\mathcal{O}(x)$ dans $\mathbb{C}_D(x)$, on procède comme au paragraphe précédent. Si $\mathbb{C}_D(x) = 0$, il n'y a rien à faire, et sinon on considère une fonction holomorphe f définie localement autour de x. On peut supposer disposer d'une coordonnée locale autour de x (quitte à réduire le voisinnage ouvert de x), et alors on associe à f les premiers coeficients de son développement en série entière autour de x.

Pour finir, supposons que $x = x_{i_0}$ pour un certain i_0 (sinon tout a déjà été fait). Considérons $f \in \mathcal{O}(x)$ qui s'envoie sur 0 dans $\mathbb{C}_D(x)$. Les n_{i_0} premiers termes de son développement en série entière sont nuls, donc x est un zero d'ordre au moins n_{i_0} de f, et elle provient de l'injection canonique $\mathcal{O}(-D)(x) \to \mathcal{O}(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour obtenir la seconde suite exacte, il suffit de tensoriser celle que l'on vient d'obtenir par le $\mathcal{O}$-module localement libre de rang 1 $\mathcal{O}(D)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathbb{C}_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D) \longrightarrow 0$$

ce qui s'écrit encore, avec les résultats du début du paragraphe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow 0$$

Même si l'isomorphisme entre $\mathbb{C}_D$ et $\mathbb{C}_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D)$ n'est pas canonique, cette suite exacte peut se définir de manière naturelle : autour d'un point x, on peut se munir d'une carte locale z. A une fonction de $\mathcal{O}(D)(x)$, possédant un unique pôle d'ordre au plus $n_x \geqslant 0$ dans un voisinnage de x, on associe les termes $a_{-n_x}, \ldots, a_{-1}$ de son développement en série de Laurent autour de x. Ceux-ci sont tous nuls si et seulement si la fonction de départ était holomorphe, ce qui nous donne l'exactitude de la suite.

3.2 L'indice d'Euler

Définition 3.2.1 *On considère X une variété complexe compacte orientée de dimension complexe m, E un fibré vectoriel hermitien holomorphe sur X. L'indice d'Euler est l'entier*

$$\chi(E) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant m} (-1)^p \dim H^p(X, E)$$

Il s'agit d'une bonne définition : pour calculer la cohomolgie de E, on utilise la résolution de Dolbeault

$$0 \longrightarrow C^\infty(X, E) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(X, \Lambda^{0,1} T_X^* \otimes E) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(X, \Lambda^{0,m} T_X^* \otimes E) \xrightarrow{\bar\partial} 0$$

On sait alors d'après le théorème d'isomorphisme de Hodge que les groupes de cohomologie sont de dimension finie, ce qui autorise notre définition de χ.

Remarque 3.2.2 *On retrouve de cette manière l'invariant d'Euler-Poincaré bien connu, qui permet entre autres de classifier les surfaces compactes réelles.*

Proposition 3.2.3 *Soient E_1, E_2, et E_3 trois fibrés tels que la suite suivante soit exacte :*

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

Alors :

$$\chi(E_2) = \chi(E_1) + \chi(E_3)$$

Démonstration : on déduit de la suite exacte la longue suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^p(X, E_1) \longrightarrow H^p(X, E_2) \longrightarrow H^p(X, E_3) \longrightarrow H^{p+1}(X, E_1) \longrightarrow \cdots$$

qui nous donne immédiatement la formule voulue en se rappelant que la somme alternée des dimensions des termes d'une suite exacte est nulle.

En fait, on définit l'indice d'Euler pour n'importe quel objet dont on peut calculer la cohomologie, tel que les groupes de cohomologie soient de dimension finie et nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Là formule précédente reste alors vraie dans ce cas général.

Proposition 3.2.4 *Soit X une surface de Riemann compacte, D un diviseur de X. Alors :*

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \deg D$$

Démonstration : $\mathcal{O}(D)$ est un $\mathcal{O}$-module localement libre de rang 1, donc un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 : on peut calculer sa cohomologie en utilisant la résolution de Dolbeault. Le faisceau gratte-ciel $\mathbb{C}_D$ est flasque, donc sa cohomologie est nulle en degré strictement positif. En particulier :

$$\chi(\mathbb{C}_D) = \dim H^0(\mathbb{C}_D) = \deg D$$

Par ailleurs, on connaît les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow 0$$

qui nous donnent

$$\begin{aligned} & \chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \chi(\mathbb{C}_D) = \chi(\mathcal{O}) + \deg D \\ \textit{et} \quad & \chi(\mathcal{O}(-D)) = \chi(\mathcal{O}) - \chi(\mathbb{C}_D) = \chi(\mathcal{O}) - \deg D \end{aligned}$$

Enfin, si D_1 et D_2 sont tous les deux des diviseurs positifs, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D_1 - D_2) \longrightarrow \mathcal{O}(D_1) \longrightarrow \mathbb{C}_{D_2} \longrightarrow 0$$

et par conséquent $\chi(\mathcal{O}(D_1 - D_2)) = \chi(\mathcal{O}(D_1)) - \chi(\mathbb{C}_{D_2}) = \chi(\mathcal{O}) + \deg D_1 - \deg D_2$, ce qui est exactement la formule que nous voulions démontrer.

Théorème 3.2.5 *Soit X une surface de Riemann compacte. Il existe des fonctions méromorphes non constantes sur X.*

Démonstration : en effet, comme $\chi(\mathcal{O}(D)) = \dim H^0(\mathcal{O}(D)) - \dim H^1(\mathcal{O}(D))$, on a $\dim \mathcal{O}(D)(X) \geqslant \chi(\mathcal{O}(D))$. Or $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \deg D$. Donc en choisissant $\deg D$ suffisamment grand, on obtient $\chi(\mathcal{O}(D)) > 1$, et par suite $\dim \mathcal{O}(D)(X) > 1$; il existe donc des fonctions méromorphes non constantes définies sur X tout entier.

3.3 Diviseurs et fibrés vectoriels en droite

Définition 3.3.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Un ensemble fermé $X \subset U$ est un ensemble analytique de U si pour tout $x \in X$, il existe un voisinnage ouvert $U' \subset U$ de x et un ensemble fini $f_1, \ldots, f_k$ de fonctions analytiques sur U' telles que :*

$$X \cap U' = \{y \in U', f_1(y) = \ldots = f_k(y) = 0\}$$

Dans le où $k = 1$ partout, on parle d'hypersurface analytique.

Une variété analytique V est dite irréductible si elle ne peut pas s'écrire comme l'union de deux variétés analytiques $V_1 \cup V_2$ sans que $V_1 = V$ ou $V_2 = V$. On dira que V est irréductible en p s'il existe un voisinage U' de p tel que $V \cap U'$ soit irréductible. Si f est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, irréductible dans $\mathcal{O}_n$, alors l'hypersurface analytique $\{f(z) = 0\}$ définie par f au voisinage de l'origine est irréductible en 0 (c'est une conséquence directe de la version faible du *nullstellensatz* que nous avons démontrée). Comme $\mathcal{O}_n$ est un anneau à factorisation unique, une hypersurface analytique s'exprime localement autour de chacun de ses points comme une union d'hypersurfaces analytiqes irréductibles.

De la même manière, on définit une sous-variété analytique V d'une variété complexe M comme étant le sous-ensemble donné localement comme les zéros d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

Soit M une variété complexe. On sait définir les fonctions holomorphes sur M à l'aide des cartes de la variété M. On va alors définir les fonctions méromorphes sur un ouvert $U \subset M$ comme étant les fonctions données localement par le quotient de deux fonctions holomorphes : dire que f est holomorphe sur U, c'est dire qu'il existe un recouvrement U_i tel que $f_{|U_i} = g_i/h_i$ avec $g_i, h_i \in \mathcal{O}(U_i)$ et $g_i h_j = g_j h_i$ sur $U_i \cap U_j$.

Définition 3.3.2 *(diviseur) Soit M une variété complexe. Un diviseur D de M est une combinaison linéaire formelle localement finie d'hypersurfaces analytiques irréductibles :*

$$D = \sum a_i V_i \qquad (a_i \in \mathbb{Z})$$

Cette définition généralise la notion de diviseur que nous avions déjà vue pour les surfaces de Riemann compactes : si X est une surface de Riemann compacte, ses hypersurfaces analytiques irréductibles sont des points, et une somme localement finie est finie par compacité. Dès lors, un divisieur de X n'est qu'une somme formelle finie de points de X, ce qui correspond bien à ce que nous avions vu.

Soit M une variété complexe, $\pi : L \to M$ un fibré vectoriel en droites holomorphe sur M. On rappelle que cela signifie qu'il existe un recouvrement ouvert U_α de M et des trivialisations locales holomorphes $\varphi_\alpha : L_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ (en notant $L_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$). Autrement dit, le recouvrement U_α rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "\pi"] & L_{U_\alpha} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"', "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_\alpha"] & U_\alpha \times \mathbb{C} \\
M & U_\alpha \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, les fonctions de transition $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}$ de L relatives aux trivialisations φ_α sont données par

$$g_{\alpha\beta}(p, z) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_{|L_p}(z) \in \mathbb{C} \qquad (p, z) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}$$

Il s'agit de fonctions holomorphes partout non nulles. Bien sûr, en tant que fonctions de transitions, eles vérifient les deux identités :

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = 1 \\ g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \end{cases}$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert et d'une famille de fonctions $\{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)\}$ partout non nulles et vérifiant les deux identités caractéristiques des fonctions de transition définit un fibré vectoriel en droites holomorphe.

Proposition 3.3.3 *Soit M une variété complexe, $D = \sum a_i V_i$ un diviseur de M. Alors on peut définir un fibré vectoriel $\mathcal{O}(D)$ holomorphe de rang 1 sur M.*

Démonstration : on peut trouver un recouvrement ouvert U_α de M tel que chaque V_i apparaissant dans l'expression de D soit donné dans U_α par la fonction $h_{i\alpha} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, que l'on peut supposer irréductible dans $\mathcal{O}_n$. En posant $f_\alpha = \prod_i h_{i\alpha}^{a_i}$, on définit alors une fonction méromorphe non identiquement nulle sur l'ouvert U_α. Les fonctions

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$$

sont alors holomorphes et partout non-nulles sur $U_\alpha \cap U_\beta$ ($h_{i\alpha}/h_{i\beta}$ est holomorphe car $h_{i\alpha}$ et $h_{i\beta}$ définissent la même hypersurface analytique irréductible dans $U_\alpha \cap U_\beta$, donc leur rapport est une unité de $\mathcal{O}_n$, *i.e.* une fonction holomorphe partout non nulle). Dans les ouverts de définition convenables, on a facilement $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = 1$ et $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$. Ceci autorise la définition de $\mathcal{O}(D)$ comme étant le fibré vectoriel en droites holomorphe relatif aux fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$. On vérifie ici encore que cette définition de $\mathcal{O}(D)$ coincide bien avec celle que nous avions donnée auparavant pour un diviseur d'une surface de Riemann compacte.

Proposition 3.3.4 *$\mathcal{O}(D)$ est trivial si et seulement si il existe f méromorphe sur M tout entier telle que $(f) = D$.*

Démonstration : Considérons f une fonction méromorphe définie sur M tout entier. Alors, pour $D = (f)$ on peut prendre, pour tout recouvrement ouvert U_α et en conservant les notations précédentes, $f_\alpha = f_{|U_\alpha}$. Alors, les fonctions de transition de $\mathcal{O}(D)$ sont toutes égales à 1, et le fibré vectoriel $\mathcal{O}(D)$ est trivial.

Réciproquement, si D est donné localement par une famille de fonctions f_α et si le fibré $\mathcal{O}(D)$ est trivial, alors on peut trouver une famille de fonctions h_α holomorphes (et non plus seulement méromorphes) et partout non nulles sur U_α telles que les fonctions de transition soient égales à h_α/h_β (dire que le fibré est trivial, c'est exactement dire qu'il existe une section holomorphe globale). Dès lors, sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a l'identité $f_\alpha h_\alpha^{-1} = f_\beta h_\beta^{-1}$, et la collection de fonctions $f_\alpha h_\alpha^{-1}$ méromorphes sur U_α définit une fonction méromorphe f sur M tout entier telle que $(f) = D$.

Proposition 3.3.5 *Soit M une variété complexe, L un fibré vectoriel en droites holomorphe sur M. Il existe D diviseur de M tel que $L \simeq \mathcal{O}(D)$ si et seulement si il existe une section méromorphe globale de L (*i.e.* une section holomorphe globale de $L \otimes \mathcal{M}$).*

Démonstration : commenons par décrire les sections méromorphes de L. Soit U un ouvert de M. Une section $s \in (L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M})(U)$ est la donnée de fonctions méromorphes $s_\alpha \in \mathcal{M}(U \cap U_\alpha)$ (U_α étant un recouvrement de M par des ouverts trivialisants) vérifiant les relations de compatibilité :

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta \qquad \text{sur } U \cap U_\alpha \cap U_\beta$$

Les $g_{\alpha\beta}$ étant holomorphes et partout non nulles, on en déduit que l'on peut calculer l'ordre de s le long de n'importe quelle hypersurface analytique $V \subset M$ (et en particulier son diviseur (s) est bien défini).

Soit D un diviseur de M. On va exhiber une section méromorphe globale de $\mathcal{O}(D)$. On considère un recouvrement U_α de M tel que D soit donné par les fonctions méromorphes $f_\alpha \in U_\alpha$. En se souvenant que $\mathcal{O}(D)$ est donné par les fonctions de transitions $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta$, on voit que la famille de fonctions méromorphes f_α est telle que

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta \qquad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta$$

et donc définit une section méromorphe globale du fibré $\mathcal{O}(D)$.

Réciproquement, soit L un fibré vectoriel en droites holomorphe muni d'une section méromorphe globale s. Alors pour un recouvrement U_α par des ouverts trivialisants, on a

$$g_{\alpha\beta} = \frac{s_\alpha}{s_\beta}$$

ce qui prouve que L est en fait le fibré vectoriel associé au diviseur de s : (s).

3.4 Degré d'un fibré en droites

Définition 3.4.1 *Soit X une surface de Riemann compacte, L un fibré vectoriel en droites holomorphe sur X. On pose :*

$$\deg L = \chi(L) - \chi(\mathcal{O})$$

Notons que s'il s'agit du fibré vectoriel en droites associé à un diviseur de X, on retrouve bien l'ancienne définition du degré. On conserve les notations de la définition précédente pour tout ce paragraphe.

Proposition 3.4.2 *Si $H^0(L)$ est non nul, alors $\deg L \geqslant 0$. Dans le cas $\deg L = 0$, on a $L \simeq \mathcal{O}$.*

Démonstration : supposons $H^0(L) \neq 0$, et considérons alors $s \neq 0$ appartenant à $H^0(L)$, section holomorphe non nulle globale de L, définie sur X tout entière.

Si U est un ouvert quelconque de X, l'application $t \in \mathcal{O}(U) \mapsto st \in L(U)$ nous donne une injection $\mathcal{O}(U) \longrightarrow L(U)$ compatible avec les restrictions, *i.e.* un morphisme injectif de faisceaux $\mathcal{O} \longrightarrow L$.

s est non nulle, donc ses zéros sont isolés. Ils sont en nombre finis car X est compacte. On écrit alors le diviseur de s : $(s) = n_1x_1 + \cdots + n_dx_d$, où les n_i sont tous positifs et les x_i deux à deux distincts, et on considère le faisceau gratte-ciel $\mathbb{C}_{(s)}$. On fabrique alors une application $L \longrightarrow \mathbb{C}_{(s)}$ en associant à une section de L les premiers termes de son développement en série entière autour des points x_i.

La suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{C}_{(s)} \longrightarrow 0$$

est exacte. Il suffit en effet de prouver l'exactitude locale, et celle-ci est claire. Alors, $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}) + \chi(\mathbb{C}_{(s)})$, et donc $\deg L = \chi(\mathbb{C}_{(s)}) \geqslant 0$.

Maintenant, si $\deg L = 0$, alors $(s) = 0$ et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

i.e. un isomorphisme $L \simeq \mathcal{O}$.

Proposition 3.4.3 *On a les formules sur le degré :*

$$\deg L(x) = \deg L + 1$$
$$\deg L(-x) = \deg L - 1$$

Démonstration : on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L(x) \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$$

Pour voir cela, considérons U un ouvert de X. $L(U)$ est l'anneau des sections holomorphes de L au dessus de U, $L(x)(U)$ celui des sections méromorphes de L au dessus de U ayant au plus un pôle simple en x, et holomorphes partout ailleurs. L'injection de $L(U)$ dans $L(x)(U)$ est alors claire. Maintenant, on associe à un élément de $L(x)(U)$ son résidu en x ; c'est une section du faisceau gratte-ciel $\mathbb{C}_x$ au dessus de U. La flèche $L(x)(U) \longrightarrow \mathbb{C}_x(U)$ est clairement surjective, et le résidu est nul si et seulement si la section est holomorphe en x, autrement dit si et seulement si la section provient de l'injection canonique $L(U) \longrightarrow L(x)(U)$, ce qui achève la preuve de l'exactitude de la suite.

On a alors $\chi(L)(x) = \chi(L) + \chi(\mathbb{C}_x) = \chi(L) + 1$, et donc $\deg L(x) = \chi(L(x)) - \chi(\mathcal{O}) = \chi(L) - \chi(\mathcal{O}) + 1 = \deg L + 1$, ce qui nous donne la première formule.

La seconde s'obtient de manière analogue en consdérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow L(-x) \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{C}_x \longrightarrow 0$$

Proposition 3.4.4 *Il existe D diviseur de X, unique à équivalence linéaire près, tel que*

$$L \simeq \mathcal{O}(D)$$

Démonstration : d'après la proposition 3.4.3, pour tout entier n, $\deg L(nx) = \deg L + n$. Donc pour n suffisamment grand :

$$h^0(L(nx)) = \chi(L(nx)) + h^1(L(nx)) \geqslant \chi(L(nx)) = \deg L(nx) + \chi(\mathcal{O}) = \deg L + \chi(\mathcal{O}) + n \geqslant 0$$

et il existe une section holomorphe globale de $L(nx)$. Ainsi, il existe une section méromorphe globale de L, et on sait alors qu'il existe un diviseur D de X tel que

$$L \simeq \mathcal{O}(D)$$

Supposons maintenant connaître D et D' deux diviseurs tels que $L \simeq \mathcal{O}(D)$ et $L \simeq \mathcal{O}(D')$. Alors, le fibré $\mathcal{O}(D-D') = \mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-D') = L \otimes_{\mathcal{O}} L^*$ est trivial, donc il existe f méromorphe sur X tout entier, tel que $D - D' = (f)$. Autrement dit, D et D' sont linéairement équivalents.

3.5 Genre

Définition 3.5.1 *Soit X une surface de Riemann compacte. On note $\Omega_X = \Lambda^{1,0}T^*_X \otimes \mathcal{O}$ le faisceau des formes différentielles holomorphes sur X. On définit alors le genre de X :*

$$g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega_X)$$

comme étant la dimension de l'espace des formes différentielles holomorphes définies sur X tout entier.

Il s'agit d'une définition correcte, car cette dimension est finie d'après le théorème d'isomorphisme de Hodge.

Proposition 3.5.2 *Le genre d'une surface de Riemann est un invariant topologique. Plus précisément :*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$$

Démonstration : on considère la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \xrightarrow{d} 0$$

(cette suite est bien exacte : les fonctions holomorphes à diférentielle nulle sont localement constantes, et on peut toujours trouver localement une primitive holomorphe à une fonction holomorphe). On écrit la longue suite exacte de cohomologie qui s'en déduit :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \\ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(on a bien sûr $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, par exemple en utilisant la résolution de Dolbeault pour le calcul). On a donc l'identité sur les dimensions des groupes de cohomologie :

$$h^0(X, \mathbb{C}) - h^0(X, \mathcal{O}_X) + h^0(X, \Omega_X) - h^1(X, \mathbb{C}) + h^1(X, \mathcal{O}_X) - h^1(X, \Omega_X) + h^2(X, \mathbb{C}) = 0$$

Comme X est connexe : $h^0(X, \mathbb{C}) = 1$. Alors, avec la dualité de Poincaré : $h^2(X, \mathbb{C}) = h^0(X, \mathbb{C}) = 1$. Par ailleurs, $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ car X est compacte. Avec la dualité de Serre : $h^1(X, \Omega_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$. Enfin, toujours avec la dualité de Serre et par définition du genre : $h^0(X, \Omega_X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = g$. Donc finalement, notre identité s'écrit :

$$1 - 1 + g - h^1(X, \mathbb{C}) + g - 1 + 1 = 0$$

soit encore

$$h^1(X, \mathbb{C}) = 2g$$

Cette dernière formule nous donne le fait que g est un invariant topologique : la dimension $h^1(X, \mathbb{C})$ peut se calculer avec la cohomologie de De Rham, qui on le sait est la même pour deux variétés homéomorphes.

3.6 Le théorème de Riemann-Roch

Théorème 3.6.1 *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g, D un diviseur de X. Alors :*

$$h^0(\mathcal{O}(D)) - h^0(\Omega_X(-D)) = \deg D + 1 - g$$

Démonstration : en utilisant la résolution de Dolbeault pour le calcul de $\chi(\mathcal{O})$:

$$\chi(\mathcal{O}) = \dim \mathcal{O}(X) - \dim \Lambda^{0,1} T_X^* \otimes \mathcal{O}(X) = \dim \mathcal{O}(X) - \dim H^0(\Omega_X)$$

(en utilisant la dualité de Serre pour dire que $\dim \Lambda^{0,1} T_X^* \otimes \mathcal{O}(X) = \dim H^0(\Omega_X)$). Comme X est compacte, on sait que $\dim \mathcal{O}(X) = 1$, et on en conclut :

$$\chi(\mathcal{O}) = 1 - g$$

Toujours en utilisant la résolution de Dolbeault pour le calcul de l'indice d'Euler :

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = h^{0,0}(\mathcal{O}(D)) - h^{0,1}(\mathcal{O}(D))$$

(où $h^{p,q}$ désigne la dimension de l'espace $H^{p,q}$). Or on sait que $\mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-D) = \mathcal{O}$, donc le fibré $\mathcal{O}(-D)$ est le dual du fibré $\mathcal{O}(D)$. Donc d'après la dualité de Serre $H^{0,1}(\mathcal{O}(D))^* = H^{1,0}(\mathcal{O}(-D))$ Autrement dit

$$H^1(\mathcal{O}(D))^* = H^0(\Omega_X(-D))$$

et ces deux espaces ont la même dimension finie. Donc $h^{0,1}(\mathcal{O}(D)) = h^0(\Omega_X(-D))$. Alors, en se souvenant que $\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \deg D$, on obtient le résultat voulu.

Corollaire 3.6.2 *Si L est un fibré vectoriel holomorphe en droites sur X, alors on a*

$$h^0(L) - h^0(\Omega_X \otimes L^*) = \deg L + 1 - g$$

4 Plongement dans un espace projectif

4.1 Cas d'un tore complexe

On se donne Λ un sous groupe discret de $\mathbb{C}$ de la forme $e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z}$, où le rapport entre e_1 et e_2 n'est pas réel. On veut définir une bijection biholomorphe entre le tore $\mathbb{C}/\Lambda$ et une courbe elliptique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par une équation algébrique de la forme $y^2t = x^3 + pxt^2 + qt^3$. On va pour cela exhiber une application $\mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ holomorphe, injective, et à différentielle injective.

On définit la fonction $\wp$ de Weierstrass par la formule suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

On montre qu'elle est paire, Λ-périodique, méromorphe sur $\mathbb{C}$, que ses pôles sont les points de Λ, qu'ils sont d'ordre 2, et qu'en chacun de ces points la partie principale est $\frac{1}{(z-\omega)^2}$. On calcule son développement de Laurent au voisinnage de l'origine :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geqslant 1} (2n+1) \left(\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2n+2}} \right) z^{2n}$$

Pour la suite, on notera G_k les séries d'Eisenstein :

$$G_k = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}$$

La dérivée de $\wp$ s'exprime comme suit :

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

On montre alors, en utilisant la Λ-périodicité et les développements de Laurent en 0 que la fonction $\wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp + 140G_6$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, et donc constante (par Λ-périodicité) égale à 0. On a donc l'identité :

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6$$

Nous allons ensuite avoir besoin d'un lemme général. On se donne une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$, et on considére un lacet γ entourant (en ne faisant qu'un tour, et dans le sens direct) U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors, le théoréme des résidus nous donne :

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in U} v_a(f)$$

où $v_a(f)$ désigne la valuation de f en a, c'est-à-dire l'entier n tel que f s'écrive $f(z) = (z-a)^n g(z)$ au voisinnage de a avec g holomorphe au voisinnage de a telle que $g(a) \neq 0$.
Dans le cas qui nous intéresse ici, on considére pour γ les parallélogrammes reliant les points a, $a+e_1$, $a+e_1+e_2$ et $a+e_2$ dans cet ordre, avec $a \in \mathbb{C}$ à choisir convenablement, de sorte que le lacet ne rencontre pas de point du réseau Λ. Alors, par Λ-périodicité, on obtient :

$$\int_\gamma \frac{\wp'(z)}{\wp(z)} dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} dz = 0$$

Ce résultat reste bien entendu vrai lorsque l'on remplace $\wp$ par $\wp - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque. Or, dans un parallélogramme, $\wp$ (resp. $\wp'$) posséde un unique pôle d'ordre 2 (resp. 3). Donc $\wp$ (resp. $\wp'$) prend exactement 2 (resp. 3) fois toutes les valeurs de $\mathbb{C}$ dans le parallélogramme.

On sait d'aprés ce qui précéde que $\wp'$ posséde exactement trois zéros (distincts ou non) dans le parallélogramme. On sait par imparité et Λ-périodicité que $\wp'(z) = -\wp'(\omega - z)$ pour tout $\omega \in \Lambda$. En particulier :

$$\wp'(\frac{e_1}{2}) = \wp'(\frac{e_2}{2}) = \wp'(\frac{e_1 + e_2}{2}) = 0$$

Donc $\wp'$ posséde trois zéros distincts, et on les connaît (ce qui nous donne au passage les trois zéros distincts du polynôme $4x^3 - 60G_4x - 140G_6$, ce qui est non-trivial).

On considére alors l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{C}/\Lambda & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ & z & \longmapsto & (\wp(z) : \wp'(z) : 1) \end{array}$$

φ est injective. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, par parité et Λ-périodicité, on a $\wp(z) = \wp(\omega - z)$ pour tout $\omega \in \Lambda$. Or chaque valeur est atteinte exactement 2 fois comme on l'a vu, et on a par imparité de $\wp'$ que $\wp'(z) = -\wp'(\omega - z)$. Les seuls points où il peut y avoir un défaut d'injectivité pour φ sont donc ceux tels que $\wp'(z) = \wp'(\omega - z) = 0$, et on a vu que ces points sont $e_1/2$, $e_2/2$ et $(e_1 + e_2)/2$ où il n'y a en fait pas de probléme puisque pour eux $z = \omega - z \bmod \Lambda$.
φ est à différentielle injective, puisque tous les zéros de $\wp'$ sont simples, et donc n'annulent pas $\wp''$.

Pour la suite, on notera $(x : y : t)$ la variable courante dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Pour $z \notin \Lambda$, vue la définition de φ, et l'identité vérifiée par $\wp$, on a :

$$y^2t = 4x^3 - 60G_4xt^2 - 140G_6t^3$$

Il s'agit d'une équation homogéne, donc bien définie pour $(x : y : t) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. En général, si on fixe un ω_0 dans Λ, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \ : \ -2\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3} \ : \ 1\right) \\ &= \left((z-\omega_0)^3\left[\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right] \ : \ -2(z-\omega_0)^3\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3} \ : \ (z-\omega_0)^3\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\varphi(\omega_0) = (0 : 1 : 0)$$

qui vérifie encore l'équation $y^2t = 4x^3 - 60G_4xt^2 - 140G_6t^3$.
Réciproquement, si un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vérifie cette équation algébrique (*i.e.* s'il appartient à la courbe elliptique), il lui correspond un unique point de $\mathbb{C}/\Lambda$: $\wp$ prend exactement deux fois toutes les valeurs de $\mathbb{C}$, donc on trouve deux z tels que $\wp(z) = x$ (qui sont égaux si et seulement si $y = 0$), alors $\wp'(z)$ vérifie l'équation de la courbe algébrique, et il suffit de prendre le z qui correspond à la bonne valeur de $\wp'$.

Ainsi, le tore $\mathbb{C}/\Lambda$ est isomorphe à la courbe elliptique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par l'équation

$$y^2t = 4x^3 - 60G_4xt^2 - 140G_6t^3$$

4.2 Plongement dans le cas général

Lemme 4.2.1 *Si X est une surface de Riemann compacte de genre g, alors*

$$\deg \Omega_X = 2g - 2$$

Preuve : d'aprés le théoréme de Riemann-Roch

$$h^0(\Omega_X) - h^0(\Omega_X \otimes \Omega_X^*) = \deg \Omega_X + 1 - g$$

Or par définition du genre, $h^0(\Omega_X) = g$. D'autre part, $h^0(\Omega_X \otimes \Omega_X^*) = h^0(\mathcal{O}) = 1$ car X est compacte. Donc finalement

$$\deg \Omega_X = g - 1 - (1 - g) = 2g - 2$$

C.Q.F.D.

Théorème 4.2.2 *On note g le genre de X. Si L est un fibré vectoriel en droites holomorphe sur X, et si $\deg L \geqslant 2g + 1$, alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(L))^* \\ & x & \longmapsto & H^0(L(-x)) \end{array}$$

est un plongement holomorphe.

Démonstration : L'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(L))^*$ est l'espace des droites d'applications linéaires sur l'espace vectoriel de dimension finie $H^0(L)$, soit l'espace des hyperplans de $H^0(L)$. Pour commencer, montrons que quel que soit $x \in X$, $H^0(L(-x))$ est un hyperplan de $H^0(L)$. D'aprés le théoréme de Riemann-Roch :

$$h^0(L) = h^0(\Omega_X \otimes L^*) + \deg L + 1 - g$$

Comme $\deg(\Omega_X \otimes L^*) = \deg \Omega_X + \deg L^* = 2g - 2 - \deg L \leqslant -3$, d'aprés la proposition 3.4.2 on a $h^0(\Omega_X \otimes L^*) = 0$, et donc

$$h^0(L) = \deg L + 1 - g$$

De la même maniére, $h^0(L(-x)) = h^0(\Omega_X \otimes L(-x)^*) + \deg L(-x) + 1 - g$. On a $\deg(\Omega_X \otimes L(-x)^*) = 2g - 2 - \deg L(-x) \leqslant -2$, donc $h^0(\Omega_X \otimes L(-x)^*) = 0$, et $h^0(L(-x)) = \deg L(-x) + 1 - g = h^0(L) - 1$, ce qui prouve que $H^0(L(-x))$ est un hyperplan de $H^0(L)$.

Pour montrer que l'application est injective, considérons x et y distincts dans X. En remarquant que

$$\begin{tikzcd} & H^0(L(-x)) \\ H^0(L(-x-y)) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & H^0(L(-y)) \end{tikzcd}$$

on voit que la condition $H^0(L(-x)) \neq H^0(L(-y))$ équivaut à la condition $H^0(L(-x-y)) \subsetneq H^0(L(-x))$. Or on a, toujours de la même maniére, $h^0(L(-x-y)) = h^0(\Omega_X \otimes L(-x-y)^*) + \deg L(-x-y) + 1 - g$, et $h^0(\Omega_X \otimes L(-x-y)^*) = 0$ car $\deg(\Omega_X \otimes L(-x-y)^*) = 2g - 2 - \deg L(-x-y) \leqslant -1$, donc pour finir $h^0(L(-x-y)) = h^0(L(-x)) - 1$, ce qui prouve l'injectivité de φ.

Pour finir, montrons que φ est à différentielle injective ; considérons $x \in X$, et $s_1, \ldots, s_p$ une base de $H^0(L(-x))$. La différentielle de φ est injective si et seulement si l'une au moins des sections $s_1, \ldots, s_p$ a une dérivée non nulle, *i.e.* s'il existe une section $s \in H^0(L(-x)) \setminus H^0(L(-2x))$. Toujours avec les mêmes calculs, on obtient $h^0(L(-2x)) = h^0(L(-x)) - 1$, et donc $H^0(L(-x)) \setminus H^0(L(-2x)) \neq \emptyset$, ce qui achéve la démonstration.

4.3 Cas du genre 0

Théorème 4.3.1 *Une surface de Riemann compacte et connexe de genre 0 est isomorphe à la sphére de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Démonstration : soit en effet X une surface de Riemann compacte et connexe de genre 0. Pour tout diviseur D de X, on a d'aprés le théoréme de Riemann-Roch :

$$h^0(X, \mathcal{O}(D)) - h^0(X, \Omega(-D)) = \deg D + 1$$

En particulier, si on se donne x et y deux points distincts de X :

$$h^0(X, \mathcal{O}(x - y)) \geqslant 1$$

Ainsi, il existe une fonction méromorphe non nulle f définie sur X tout entier ayant un pôle d'ordre au plus 1 en x et un zéro d'ordre au moins 1 en y. En fait, on peut supposer qu'elle posséde en x un pôle d'ordre exactement 1, car sinon ce serait une fonction holomorphe sur X, donc constante ; comme elle posséde un zéro en y, ce serait la fonction nulle.

Mais une fonction méromorphe définie sur X, c'est une fonction holomorphe $X \to \widehat{\mathbb{C}}$. Alors, comme f posséde un unique pôle (en x, d'ordre exactement 1), on sait qu'elle établit une bijection biholomorphe entre X et $\widehat{\mathbb{C}}$, ce qu'il fallait démontrer.

4.4 Cas du genre 1

Théorème 4.4.1 *Toute surface de Riemann compacte et connexe X de genre 1 peut se réaliser comme une cubique non-singuliére de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Démonstration : Soit p un point de X. Le fibré $\mathcal{O}(3p)$ est de degré 3, donc il nous fournit un plongement φ de X dans $\mathbb{P}^2$ d'aprés le théoréme 4.2.2. On va donner une expression explicite de φ. En reprenant les calculs de la démonstration du théoréme de plongement, on obtient :

- $h^0(\mathcal{O}) = 1$
- $h^0(\mathcal{O}(p)) = 1$
- $h^0(\mathcal{O}(2p)) = 2$
- $h^0(\mathcal{O}(3p)) = 3$

Ceci nous permet de considérer une base s_0, s_1, s_2 de $H^0(\mathcal{O}(3p))$ telle que s_0 soit holomorphe sur X (c'est donc une constante et on peut la supposer égale à 1), s_1 ait un pôle double en p, et s_2 un pôle triple en p. On note s_0^*, s_1^*, s_2^* la base duale correspondante dans $H^0(\mathcal{O}(3p))^*$. Alors pour $x \in X$ et $s \in H^0(\mathcal{O}(3p))$, $s(x) = 0$ si et seulement si $s_0^*(s)s_0(x) + s_1^*(s)s_1(x) + s_2^*(s)s_2(x) = 0$. Cette derniére condition nous donne une équation linéaire de l'hyperplan $H^0(\mathcal{O}(3p - x))$, et donc une expression de φ :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & x & \longmapsto & (1 : s_1(x) : s_2(x)) \end{array}$$

(pour le point p, on obtiendra $(0 : 0 : 1)$)

D'autre part :

$$s_2, s_2^2, s_2 s_1, s_1, s_1^2, s_1^3, 1 \in H^0(\mathcal{O}(6p))$$

et $h^0(\mathcal{O}(6p)) = h^0(\Omega_X \otimes \mathcal{O}(-6p)) + \deg \mathcal{O}(6p) + 1 - 1$ d'aprés le théoréme de Riemann-Roch, ce qui donne $h^0(\mathcal{O}(6p)) = 6$ car $\deg(\Omega_X \otimes \mathcal{O}(-6p)) = \deg \Omega_X + \deg \mathcal{O}(-6p) = -6 < 0$. Il existe donc une relation de dépendance linéaire entre ces 7 éléments de $H^0(\mathcal{O}(6p))$. Plus précisément, on a :

- $1 \in H^0(\mathcal{O})$
- $s_1 \in H^0(\mathcal{O}(2p))$
- $s_2 \in H^0(\mathcal{O}(3p))$
- $s_1^2 \in H^0(\mathcal{O}(4p))$
- $s_1 s_2 \in H^0(\mathcal{O}(5p))$
- $s_1^3, s_2^2 \in H^0(\mathcal{O}(6p))$

donc s_1^3 et s_2^2 apparaissent tous les deux dans la relation de dépendance linéaire, et avec des coefficients opposés, que l'on peut supposer être 1 et -1. On a donc une relation :

$$s_2^2 + a_1 s_1 s_2 + a_2 s_2 = s_1^3 + a_3 s_1^2 + a_4 s_1 + a_5$$

où $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$. Quitte à changer s_2 en $s_2' = s_2 + \dfrac{1}{2}(a_1 s_1 + a_2)$, on peut supposer avoir la relation :

$$s_2^2 = s_1^3 + a_3 s_1^2 + a_4 s_1 + a_5 = (s_1 - \alpha_0)(s_1 - \alpha_1)(s_1 - \alpha_2) \tag{8}$$

Pour la suite de la démonstration, on identifie les fonctions méromorphes et les fonctions holomorphes à valeurs dans la sphére de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, et on utilise les résultats du théoréme 1.4.1. Supposons par l'absurde avoir $\alpha_0 = \alpha_1$. On sait que s_2 prend 3 fois la valeur 0, et s_1 prend deux fois les valeurs α_0 et α_2 (en comptant avec les multiplicités). Alors, tenant compte de l'égalité (8), s_2 s'annule exactement là où s_1 vaut α_0 ou α_2, donc s_1 prend au moins l'une des deux valeurs α_0 et α_1 de maniére double. Quitte à changer les notations, on suppose que α_0 est prise de façon double au point $q_0 \in X$. s_1 et s_2 ne peuvent avoir simultanément une valeur double, sinon la différentielle de φ ne serait plus injective. Donc en q_0, s_2 posséde un zéro d'ordre 1. Il existe alors q_1 et q_2 dans X distincts de q_0 tels que $s_2(q_1) = s_2(q_2) = 0$ (avec éventuellement $q_1 = q_2$). Si $q_1 = q_2$, alors s_1 prend la valeur α_2 de façon simple en $q_1 = q_2$. Mais alors il existe un autre point q_3 où $s_1(q_3) = \alpha_2$, et donc $s_2(q_3) = 0$: c'est impossible. Donc $q_1 \neq q_2$, et la valeur $(1 : \alpha_2 : 0)$ est atteinte deux fois, ce qui contredit l'injectivité de φ ; contradiction ! De la même maniére, on ne peut pas avoir $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$, donc par un nouveau changement de variables linéaires, on obtient la relation :

$$s_2^2 = s_1(s_1 - 1)(s_1 - \lambda)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est égal ni à 0 ni à 1.

Reste alors à voir que tout point $(1 : x_0 : y_0) \in \mathbb{P}^2$ vérifiant $y_0^2 = x_0(x_0-1)(x_0-\lambda)$ correspond à un point de X, *i.e.* qu'il existe $q \in X$ tel que $\varphi(q) = (1 : x_0 : y_0)$. On note C la cubique. C'est une surface de Riemann. Elle est fermée dans $\mathbb{P}^2$ qui est compact, donc compacte. Elle est connexe, car $y^2 - x(x-1)(x-\lambda)$ est irréductible. Notre application de plongement φ est donc une application analytique entre deux surfaces de Riemann compactes et connexes. Comme elle est injective, on en déduit alors grâce au théoréme 1.4.1 que tous les points de C ont un unique antécédent par φ.

Ainsi, X s'identifie par le plongement φ à la cubique de $\mathbb{P}^2$ d'équation

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

avec $\lambda \notin \{0, 1\}$, ce qui conclut la preuve.

4.5 Courbe plane dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

On se donne $P \in \mathbb{C}[Z_0, Z_1, Z_2]$ un polynôme homogéne de degré d. On impose de plus que la différentielle dP soit non nulle pour $(Z_0, Z_1, Z_2) \neq (0, 0, 0)$. Le lieu S des zéros de P se plonge dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On voit avec le théoréme d'inversion locale holomorphe qu'il s'agit d'une surface de Riemann. Elle est compacte, comme fermé du compact $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Théorème 4.5.1 *(application des résidus de Poincaré) Soit M une variété complexe, V une hypersurface analytique réguliére de M. La suite de faisceaux suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \Omega_M^n \longrightarrow \Omega_M^n(V) \longrightarrow \Omega_V^{n-1} \longrightarrow 0$$

Démonstration : Quitte à décomposer V en une union disjointe d'hypersurfaces analytiques, on suppose que V est irréductible. On se donne un recouvrement ouvert U_α de M et une famille de fonctions irréductibles $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ non identiquement nulles qui définissent l'hypersurface analytique V. Le fibré $\mathcal{O}(V)$ est donné par les fonctions de transition $g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$; elles sont holomorphes et partout non nulles sur leur ouvert de définition $U_\alpha \cap U_\beta$. L'hypothése V réguliére signifie que df_α est partout non nulle.

On définit le fibré holomorphe normal à V dans M comme étant le quotient $N_V = T'_M|_V / T'_V$. Le fibré conormal N_V^* est le dual de N_V ; c'est le sous-fibré de ${T'_M}^*|_V$ correspondant aux sections nulles sur $T'_V \subset T'_M|_V$.

Sur l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta$, on a :

$$df_\alpha = d(g_{\alpha\beta} f_\beta) = dg_{\alpha\beta} f_\beta + g_{\alpha\beta} df_\beta = g_{\alpha\beta} df_\beta \tag{9}$$

car comme $g_{\alpha\beta}$ est holomorphe, on a $dg_{\alpha\beta} = 0$. Par ailleurs, f_α étant identiquement nulle sur $U_\alpha \cap V$, df_α est une section du fibré conormal N_V^* de V. On sait qu'elle est partout non nulle. Donc, les df_α toutes ensembles forment une section holomorphe globale du fibré $N_V^* \otimes \mathcal{O}(V)$ partout non nulle (de maniére équivalente, les df_α / f_α forment une section méromorphe globale de N_V^* car $df_\alpha / f_\alpha = df_\beta / f_\beta$ d'aprés (9), ayant un pôle simple le long de V et holomorphe partout ailleurs). Il s'agit donc du fibré trivial. Autrement dit $N_V^* \otimes \mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}(M)$, et en tensorisant par $\mathcal{O}(-V)$, on obtient :

$$N_V^* = \mathcal{O}(-V)|_V \tag{10}$$

Comme on a la suite exacte de fibrés vectoriels sur l'hypersurface analytique V

$$0 \longrightarrow N_V^* \longrightarrow {T'_M}^*|_V \longrightarrow {T'_V}^* \longrightarrow 0$$

on a clairement $(\Lambda^n {T'_M}^*)\big|_V = \Lambda^{n-1} {T'_V}^* \otimes N_V^*$. Autrement dit, $\Omega_M^n|_V = \Omega_V^{n-1} \otimes N_V^*$, et donc avec la formule (10) :

$$\Omega_V^{n-1} = \Omega_M^n|_V \otimes \mathcal{O}(V)|_V = \Omega_M^n(V)|_V \tag{11}$$

Considérons ω une section du fibré $\Omega_M^n(V)$ des formes méromorphes de rang n sur M, définie sur l'ouvert $U \subset M$ et ayant un pôle simple sur V et holomorphes partout ailleurs. Localement, on écrit

$$\omega = \frac{g(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f(z)}$$

où $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est une coordonnée locale de M, et f une fonction holomorphe définissant localement V. La formule (11) nous donne $\Omega_V^{n-1} = \Omega_M(V)|_V \otimes {\Omega_M^{n-1}}\big|_V$. Alors, comme df/f définit une section de $\Omega_M(V)$ définie globalement sur l'ouvert U, et que ${\Omega_M^{n-1}}\big|_V$ est un fibré en droites, la formule

$$\omega = \frac{df}{f} \wedge \omega'$$

définit une application $\omega \in \Omega^n_M(V)(U) \longmapsto \omega' \in \Omega^{n-1}_M\big|_V(U)$. Avec la cordonnée locale z, $df = \sum \partial_i f dz_i$, et donc on peut prendre comme expression locale pour ω'

$$\omega' = (-1)^{i-1} \frac{g(z)dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \ldots \wedge dz_n}{\partial_i f(z)}\Bigg|_V$$

pour tout i tel que $\partial_i f(z) \neq 0$ (comme df est partout non nulle on peut, quitte à réduire le voisinage sur lequel f définit V, trouver un i tel que $\partial_i f$ soit partout non nulle sur le voisinage en question).

La condition de restriction à V est donnée localement par $f = 0$. Ainsi, ω' est nulle si et seulement si $g|_{f=0} = 0$, *i.e.* si f divise g, ce qui signifie exactement que ω est en fait une forme différentielle holomorphe. On a ainsi défini l'application des résidus de Poincaré $\Omega^n_M(V) \to \Omega^n_M(V)|_V \to \Omega^{n-1}_V$par la formule locale

$$\frac{g(z)dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{f(z)} \longmapsto (-1)^{i-1} \frac{g(z)dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \ldots dz_n}{\partial_i f(z)}\Bigg|_{f=0}$$

et elle réalise la suite de fibrés

$$0 \longrightarrow \Omega^n_M \longrightarrow \Omega^n_M(V) \longrightarrow \Omega^{n-1}_V \longrightarrow 0$$

comme une suite exacte, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 4.5.2 *On a :*

$$H^p(\mathbb{P}^n, \Omega^q) = \begin{cases} \mathbb{C} & si\ p = q \leqslant n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Démonstration : on calcule les groupes de cohomologie $H^p(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ en utilisant la cohomologie de de Rham :

$$\begin{cases} H^{2p+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) & = 0 \\ H^{2p}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) & = \mathbb{C} \quad \text{si } p \leqslant n \end{cases}$$

Ensuite, on a d'aprés la décomposition de Hodge :

$$H^r(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{p+q=r} H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p)$$

On sait de plus que $H^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = \overline{H^{q,p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n)}$, et donc $h^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = h^{q,p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n)$.

Si p et k sont deux entiers distincts, $2k - p \neq p$. Donc

$$1 = h^{2k}(\mathbb{P}^n) \geqslant h^{p,2k-p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) + h^{2k-p,p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = 2h^{p,2k-p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n)$$

donc $h^{p,2k-p}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = 0$. Et immédiatement, on a $h^{k,k}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = h^{2k}(\mathbb{P}^n) = 1$. Avec un raisonnement analogue, $h^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{P}^n) = 0$ pour $p + q$ impair, ce qui achéve la démonstration.

Théorème 4.5.3 *Le genre de S est*

$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Démonstration : on rappelle que S est le lieu dans $\mathbb{P}^2$ des zéros du polynôme $P(Z_0, Z_1, Z_2)$ homogéne de degré d, à différentielle non-nulle hors de l'origine. On veut calculer le genre de S, *i.e.* la $\mathbb{C}$-dimension de l'espace des formes différentielles holomorphes définies sur S tout entiére.

La suite exacte de faisceaux donnée par l'application des résidus de Poincaré donne la longue suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}(S)) \longrightarrow H^0(S, \Omega^1_S) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow \cdots$$

et comme d'aprés le théoréme 4.5.2 on a $H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}) = H^1(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}) = 0$, on en déduit que l'application des résidus de Poincaré réalise un isomorphisme

$$H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^2_{\mathbb{P}^2}(S)) \simeq H^0(S, \Omega^1_S) \tag{12}$$

Sur l'ouvert $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ défini par $Z_0 \neq 0$, on utilise le systéme de coordonées holomorphe (z_1, z_2) donné par $z_1 = Z_1/Z_0$ et $z_2 = Z_2/Z_0$. Dans ces termes, S est donnée par l'équation $f(z_1, z_2) = P(1, Z_1, Z_2) = 0$. Pour une forme différentielle ω de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$ ayant un pôle simple le long de S et holomorphe partout ailleurs, on a l'écriture locale dans l'ouvert U_0 :

$$\omega = g(z_1, z_2) \frac{dz_1 \wedge dz_2}{f(z_1, z_2)} \tag{13}$$

et le résidu de Poincaré est donné par

$$-g(z_1, z_2) \frac{dz_1}{(\partial f/\partial z_2)(z_1, z_2)}\bigg|_S = g(z_1, z_2) \frac{dz_2}{(\partial f/\partial z_1)(z_1, z_2)}\bigg|_S$$

.

La forme $dz_1 \wedge dz_2$ s'étend en une forme méromorphe sur $\mathbb{P}^2$ tout entier. En effet, munissons l'ouvert $U_1 \subset \mathbb{P}^2$ défini par $Z_1 \neq 0$ des coordonnées $z'_0 = Z_0/Z_1$ et $z'_2 = Z_2/Z_1$. Sur $U_0 \cap U_1$, on a les formules de changement de coordonnées :

$$z_1 = \frac{1}{z'_0} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{z'_2}{z'_0}$$

et donc notre forme s'écrit

$$dz_1 \wedge dz_2 = \frac{-dz'_0}{{z'_0}^2} \wedge \left(\frac{dz'_2}{z'_0} - \frac{z'_2 dz'_0}{{z'_0}^2} \right) = \frac{-dz'_0 \wedge dz'_2}{{z'_0}^3}$$

En effectuant des calculs parfaitement similaires relatifs à l'ouvert $U_2 \subset \mathbb{P}^2$ défini par $Z_2 \neq 0$, on voit que $dz_1 \wedge dz_2$ s'étend comme on l'avait annoncé en une forme méromorphe sur $\mathbb{P}^2$ tout entier, que cette extension posséde un pôle d'ordre 3 le long de la ligne L définie par $Z_0 = 0$, et qu'elle est holomorphe partout aileurs.

De la même maniére,

$$f(z_1, z_2) = P(1, z_1, z_2) = P\left(1, \frac{1}{z'_0}, \frac{z'_2}{z'_0}\right)$$

s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^2$ tout entier, qui a un pôle d'ordre d le long de L, et est holomorphe partout ailleurs. En effet, si on écrit

$$P(Z_0, Z_1, Z_2) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha Z^\alpha$$

on a nécessairement $a_{0,k,d-k} \neq 0$ pour un certain entier k, car sinon P pourrait se factoriser par Z_0, ce qui est contraire à l'hypothése $dP \neq 0$ hors de l'origine. Alors

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant d} a_{d-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2} \frac{{z'_2}^{\alpha_2}}{{z'_0}^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

posséde bien un pôle d'ordre d le long de la ligne L (là encore, il faut en toute rigueur effectuer des calculs similaires pour l'ouvert U_2).

Ainsi, l'expression (13) en termes de coordonnées relatives à U_0 définit une section globale de $\Omega^2_{\mathbb{P}^2}(S)$ si et seulement si g s'étend en une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre au plus $d-3$ le long de L et holomorphe partout ailleurs, *i.e.* si g est un polynôme de degré inférieur à $d-3$ en z_1 et z_2. Alors, par l'isomorphisme (12), les formes différentielles holomorphes de rang 1 sur S sont exactement les

$$\omega = g(z_1, z_2) \frac{dz_2}{(\partial f/\partial z_1)(z_1, z_2)}\bigg|_S$$

avec g polynôme de degré inférieur à $d-3$ en z_1 et z_2. Or il y a exactement $k+1$ monômes de degré k, et donc $\sum_{k=0}^{d-3}(k+1) = (d-1)(d-2)/2$ monômes de degré inférieur à $d-3$. On connaît donc le nombre exact de formes différentielles holomorphes définies globalement sur S linéairement indépendantes, ce qui nous donne le genre de la surface de Riemann S :

$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

C.Q.F.D.

4.6 Courbe hyperelliptique

4.6.1 Définition

On considére $a_1, \ldots, a_{2k+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On définit alors une courbe de $\mathbb{C}^2$, que l'on appelle C_1 par l'équation :

$$P(s,t) = s^2 - \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} (t - a_i) = 0$$

On calcule facilement

- $\dfrac{\partial P}{\partial s} = 2s$
- $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} \prod_{j \neq i} (t - a_j)$

et on constate que $\partial P/\partial s$ et $\partial P/\partial t$ ne s'annulent jamais simultanément. C_1 est donc une surface de Riemann.

En revanche, C_1 n'est pas une surface de Riemann compacte. On va la rendre compacte en lui adjoignant un point à l'infini. Commençons par remarquer :

$$\begin{aligned} s^2 - \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} (t - a_i) &= s^2 - t^{2k+1} \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} \left(1 - \frac{a_i}{t}\right) \\ &= t^{2k+2} \left[\left(\frac{s}{t^{k+1}}\right)^2 - \frac{1}{t} \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} \left(1 - \frac{a_i}{t}\right) \right] \end{aligned}$$

Tenant compte de ce calcul, on définit une autre courbe de $\mathbb{C}^2$, que l'on appelle C_2 par l'équation :

$$s'^2 = t' \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+1} (1 - a_i t')$$

De la même maniére que pour C_1, on montre qu'il s'agit d'une surface de Riemann. On va alors réaliser C_1 et C_2 comme les deux ouverts de carte d'une même surface de Riemann C en identifiant $C_1 \setminus \{t = 0\}$ et $C_2 \setminus \{t' = 0\}$ *via* l'isomorphisme

$$t' = \frac{1}{t} \quad ; \quad s' = \frac{s}{t^{k+1}}$$

On obtient de cette maniére une surface de Riemann compacte C, qui n'est autre que la courbe C_1 à laquelle on a ajouté le point correspondant à $s' = t' = 0$ de C_2, qui est donc le point à l'infini relativement à C_1. La surface C ainsi obtenue est appellée courbe hyperelliptique.

4.6.2 Formes différentielles holomorphes

On conserve pour tout le paragraphe les notations de 4.6.1. On va déterminer les formes différentielles holomorphes sur C de maniére analogue à ce que l'on a fait pour les courbes planes.

Théorème 4.6.1 *La courbe hyperelliptique C est de genre k, et une base de $H^0(\Omega_C)$ est donnée par :*

$$\frac{dt}{s},\ t\frac{dt}{s},\ \ldots,\ t^{k-1}\frac{dt}{s}$$

Démonstration : l'application des résidus de Poincaré nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^2_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \Omega^2_{\mathbb{C}^2}(C_1) \longrightarrow \Omega^1_{C_1} \longrightarrow 0$$

Or on connaît la cohomologie de $\mathbb{C}^2$, qui est simplement connexe ; on en déduit (toujours avec la dualité de Serre) $H^0(\Omega^2_{\mathbb{C}^2}) = H^2(\mathbb{C}^2) = 0$ et $H^1(\Omega^2_{\mathbb{C}^2}) = H^1(\mathbb{C}^2) = 0$. Donc la longue suite exacte de cohomologie résultant de la suite exacte ci-dessus nous assure que l'application des résidus de Poincaré réalise un isomorphisme

$$H^0(\Omega^2_{\mathbb{C}^2}(C_1)) \simeq H^0(\Omega^1_{C_1})$$

Bien entendu, on a un isomorphisme équivalent relatif à C_2. Une forme différentielle $\omega \in H^0(\Omega^2_{\mathbb{C}^2}(C_1))$ s'écrit

$$\omega = g(s,t)\frac{ds \wedge dt}{s^2 - \prod(t - a_i)}$$

et la forme différentielle holomorphe ω_{C_1} sur C_1 qui lui est associée s'écrit

$$\omega_{C_1} = g(s,t)\frac{dt}{2s}\bigg|_{s^2 = \prod(t-a_i)}$$

(sauf bien sûr au voisinnage des points correspondants à $s = 0$, pour lesquels il faut utiliser l'écriture mettant en jeu ds). Si on voit ω_{C_1} comme une forme différentielle définie sur la courbe hyperelliptique C, elle s'écrit sur $C_1 \cap C_2$ en fonction des coordonnées (s', t'). Elle correspond à une forme différentielle holomorphe sur C tout entiére si et seulement si elle se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur C_2, *i.e.* en vertu de l'isomorphisme fourni par l'application des résidus de Poincaré si elle correspond à une forme différentielle méromorphe sur $\mathbb{C}^2$ ayant un pôle simple le long de C_2 et holomorphe partout ailleurs. Autrement dit, ω_{C_1} définit une forme différentielle holomorphe globale sur C si et seulement si

$$g\left(\frac{s'}{t'^{k+1}}, \frac{1}{t'}\right) \frac{d\left(\frac{s'}{t'^{k+1}}\right) \wedge d\left(\frac{1}{t'}\right)}{\left(\frac{s'}{t'^{k+1}}\right)^2 - \prod\left(\frac{1}{t'} - a_i\right)} = g\left(\frac{s'}{t'^{k+1}}, \frac{1}{t'}\right) \frac{dt' \wedge ds'}{t'^{k+3}} \frac{t'^{2k+2}}{s'^2 - t' \prod(1 - a_i t')}$$

est une forme différentielle méromorphe globale sur $\mathbb{C}^2$, avec un pôle simple le long de C_2 et holomorphe partout ailleurs. Il est alors clairement nécessaire et suffisant que $g(s,t)$ soit un polynôme d'ordre au plus $k-1$ en t (le seul probléme qui se pose est en $t' = 0$, *i.e.* au point à l'infini de la courbe hyperlliptique), ce qui conclut la démonstration.

4.7 Surfaces de Riemann de même genre non isomorphes

Soit X une surface de Riemann compacte. $H^0(\Omega_X)$, l'espace des formes différentielles holomorphes globales sur X est de dimension finie g. On considére une base $\omega_1, \ldots, \omega_g$, et on définit alors

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}^{g-1} \\ & x & \longmapsto & (\omega_1(x) : \ldots : \omega_g(x)) \end{array}$$

de la maniére suivante : pour $x \in X$, on peut écrire au voisinnage de x dans une coordonnée locale centrée en x : $\omega_1(z) = f_1(z)dz, \ \ldots \ , \ \omega_g(z) = f_g(z)dz$ (on utilise la même coordonnée locale pour toutes les formes différentielles de la base). Alors, si on pose $\varphi(x) = (f_1(0) : \ldots : f_g(0))$ on obtient une définition convenable, un changement de coordonnée locale induisant simplement la multiplication par une même constante de tous les $f_i(0)$. En regardant les propriétés de cette application, nous allons maintenant démontrer :

Théorème 4.7.1 *Une courbe hyperelliptique de genre $g \geqslant 2$ n'est pas une courbe plane de $\mathbb{P}^2$.*

Avant de donner une démonstration de ce théoréme, énonçons son corollaire, qui est le résultat qui nous intéresse :

Corollaire 4.7.2 *Il existe des surfaces de Riemann de même genre qui ne sont pas isomorphes.*

Démonstration : dans le cas de la courbe hyperelliptique telle qu'elle est définie paragraphe 4.6.1, et dans l'ouvert de cartes correspondant aux coordonnées (s,t) (avec les notations de ce paragraphe), en tenant compte du théoréme 4.6.1, notre application φ s'écrit

$$\varphi : (s,t) \in X \longmapsto (1 : t : \ldots : t^{g-1}) \in \mathbb{P}^{g-1}$$

Ce n'est dans ce cas certainement pas une application de plongement : elle n'est même pas injective (pour la plupart des valeurs de t, il existe deux valeurs de s distinctes telles que (s,t) soit un point de la courbe hyperelliptique).

Supposons que notre courbe hyperelliptique soit une courbe plane de $\mathbb{P}^2$ de degré d. Alors, d'aprés les résultats du paragraphe 4.5, et en conservant les notations qui y ont été introduites, on peut également exprimer φ de la maniére suivante :

$$\varphi : (1 : x : y) \in X \subset \mathbb{P}^2 \longmapsto (1 : x : y : x^2 : xy : y^2 : \ldots : x^{d-3} : x^{d-4}y : \ldots : y^{d-3}) \in \mathbb{P}^{g-1}$$

et avec une telle expression, φ est clairement un plongement, *i.e.* une application holomorphe injective et à différentielle injective.

Notre courbe hyperelliptique ne peut donc pas s'identifier à une courbe plane de $\mathbb{P}^2$. Pourtant il est possible de trouver une telle courbe plane de même genre g, d'aprés la formule du théoréme 4.5.3, ce qui nous donne le corollaire.

4.8 Algébricité des surfaces de Riemann compactes

4.8.1 Corps des fonctions méromorphes

Théorème 4.8.1 *Les fonctions méromorphes sur la sphére de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ sont exactement les fractions rationnelles.*

Démonstration : commençons par voir qu'une fraction rationnelle définit une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$. Il suffit de le voir pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[Z]$. On voit classiquement $\widehat{\mathbb{C}}$ comme la réunion de deux ouverts de carte U et U' munis de coordonnées locales z et z' respectivement, avec l'application de changement de cartes relative à $U \cap U'$: $z \longmapsto z' = 1/z$.

P définit une fonction holomorphe $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *i.e.* une fonction holomorphe sur U. En coordonnées locales, sur $U \cap U'$, celle-ci s'écrit $z' \longmapsto P(1/z')$. Alors, au voisinnage de $z' = 0$ (*i.e.* au voisinnage du point à l'infini), il s'agit d'une fraction rationnelle en z'. P définit donc bien une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

Soit maintenant f une fonction méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$, $a_1, \ldots, a_n$ ses pôles (on sait qu'ils sont en nombre fini par compacité). On note $P_{a_i}f$ la partie polaire en a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) ; c'est une fraction rationnelle qui n'a de pôle qu'en a_i. Alors, la fonction

$$f - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P_{a_i} f$$

est holomorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$, donc constante, ce qui montre que f est une fraction rationnelle.

Théorème 4.8.2 *Soient B une surface de Riemann compacte et connexe, X un revêtement ramifié analytique de degré d de B. Alors $\mathcal{M}(X)$ (l'ensemble des fonctions méromorphes sur X) est une extension algébrique de $\mathcal{M}(B)$ de degré au plus d.*

Démonstration : Soit f une fonction méromorphe sur X. On cherche un polynôme $P \in \mathcal{M}(B)[Z]$ de degré d tel que $P(f) = 0$. On note Δ_r l'ensemble de ramification de X (*i.e.* l'ensemble des points de B au dessus desquels il y a un point de ramification), Δ_p la projection sur B de l'ensemble des pôles de f.

Soit $b \in B \setminus \Delta_p$. On note $x_1, \ldots, x_d$ les points de X au dessus de b, et $\sigma_p(b)$ les valeurs pour $f(x_1), \ldots, f(x_d)$ des fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_p(b) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f(x_{i_1}) \ldots f(x_{i_p}) \qquad (1 \leqslant p \leqslant d)$$

On va démontrer que les σ_p sont des fonctions méromorphes sur B.

Soit $b \in B \setminus \Delta_r$. On considére U un voisinnage de b dans B tel que $X|_U$ soit trivial : $X|_U = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_d$, l'application $\pi : X \to B$ induisant d isomorphismes $X_i \simeq U$. On définit alors des fonctions méromorphes sur U en posant $f_i = f|_{X_i} \circ \pi^{-1}$. Alors $\sigma_p|_U = \sum f_{i_1} \ldots f_{i_p}$ est une fonction méromorphe sur U. Donc les σ_p sont méromorphes sur $B \setminus \Delta_r$.

Si maintenant $b \in \Delta_r$, on considére φ une carte centrée en b, définie sur l'ouvert U, et pour tout point $x_i \in X$ au dessus de b, ψ_i une carte de X centrée en x_i définie sur l'ouvert V_i, telles que dans ces cartes, π s'écrive $z \mapsto z^{d_i}$. Alors, comme f est méromorphe, quitte à réduire les ouverts V_i, il existe des constantes c_i et k_i telles que

$$\forall x \in V_i \qquad |f(x)| \leqslant \frac{c_i}{|\psi_i(x)|^{k_i}} = \frac{c_i}{|\varphi(\pi(x))|^{k_i/d_i}}$$

Posant $c = \sup c_i$, et $k = \sup k_i/d_i$, ceci nous permet d'obtenir une majoration

$$\forall y \in U \qquad |\sigma_p(y)| \leqslant \binom{d}{p} \frac{c^p}{|\varphi(y)|^{pk}}$$

ce qui démontre que σ_p est méromorphe au voisinnage de b, et donc finalement méromorphe sur B tout entier.

Posons alors

$$P = Z^d - \sigma_1 Z^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d \in \mathcal{M}(B)[Z]$$

On va voir que $P(f) = 0$. Si $b \in B \setminus \Delta_p$, et si on appelle $x_1, \ldots, x_d$ les points de X au dessus de b, alors $P_b(Z) = (Z - f(x_1)) \ldots (Z - f(x_d))$, et donc pour tout point x au dessus de b, $P(f)(x) = 0$. Cette égalité ayant lieu pour tout $x \in X|_{B \setminus \Delta_p}$, et $P(f)$ étant une fonction méromorphe sur X, on en déduit $P(f) = 0$, ce qui conclut la preuve.

Corollaire 4.8.3 *Soit X une surface de Riemann compacte connexe. Alors l'ensemble des fonctions méromorphes sur X, $\mathcal{M}(X)$, est une extension de type fini de degré de transcendance 1 de $\mathbb{C}$.*

Démonstration : considérons f une fonction méromorphe non constante sur X (on sait que c'est possible d'aprés le théoréme de Riemann-Roch). On peut alors considérer X comme un revêtement ramifié analytique fini de $\widehat{\mathbb{C}}$ par f. Alors $\mathcal{M}(X)$ est une extension de degré fini de $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ d'aprés le théoréme 4.8.3. On conclut en se rappellant que $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(Z)$.

Remarque 4.8.4 *En fait, si f est une fonction méromorphe non constante sur X, $\mathcal{M}(X)$ est une extension de degré fini du corps des fractions rationnelles en f à coefficients complexes.*

4.8.2 Un théoréme de Chow

En tenant compte de la définition 3.3.1, on dira qu'un ensemble fermé $X \subset \mathbb{P}^n$ est un ensemble analytique de $\mathbb{P}^n$ si pour tout $x \in X$, X est défini au voisinnage de x par un ensemble fini de fonctions analytiques au voisinnage de x dans un systéme de coordonnées affines autour de x.

On a vu qu'une surface de Riemann compacte peut-être vue comme une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{P}^n$. C'est alors un ensemble analytique de $\mathbb{P}^n$.

Une autre façon de voir les choses serait de définir les ensembles analytiques comme une union de sous-variétés et de points singuliers. C'est le point de vue qui est adopté dans ce qui suit :

Définition 4.8.5 *Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Un ensemble fermé $X \subset U$ est un ensemble *-analytique de U s'il peut se décomposer en :*

$$X = X^{(r)} \cup X^{(r-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$$

où les $X^{(i)}$ sont des sous-variétés analytiques de U telles que pour tout i on ait $\overline{X^{(i)}} \subset X^{(i)} \cup X^{(i-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$. Si $X^{(r)} \neq \emptyset$, on dit que r est la dimension de X.

Théorème 4.8.6 *Un ensemble *-analytique est analytique.*

Remarque 4.8.7 *En fait, la réciproque est vraie également, mais cela ne nous servira pas ici. On peut trouver une démonstration de ce fait dans [GR65] et [Mum95].*

Le théoréme 4.8.6 est démontré dans [Mum95].

Théorème 4.8.8 *(Chow) Si $X \subset \mathbb{P}^n$ est un ensemble *-analytique, c'est une union finie de variétés algébriques.*

Démonstration : on considére l'injection canonique

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

Elle nous permet de définir $CX = \pi^{-1}(X)$, que l'on peut voir comme un cône au-dessus de X dans $\mathbb{C}^{n+1}$. C'est alors clairement lui aussi un ensemble *-analytique, dont les couches sont les $\pi^{-1}(X^{(i)})$ (en reprenant les notations de la définition 4.8.5), de dimension $i+1$, à ceci prés qu'il n'est pas fermé. On en fait un ensemble *-analytique en posant $Z = CX \cup \{0\}$, où $\{0\}$ est le "$Z^{(0)}$".

Alors, d'aprés le théoréme 4.8.6, Z est un ensemble analytique de $\mathbb{C}^{n+1}$. Considérons une boule ouverte U autour de 0 et $f_1, \dots, f_k$ des fonctions analytiques sur U définissant Z sur cet ouvert. Quitte à réduire U, on les écrit

$$f_i(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} a_\alpha^{(i)} x^\alpha \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

Etant donnée sa définition, Z est invariant par homothéties. Donc pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leqslant 1$, les $f_i^\lambda(x_0, \dots, x_n) = f_i(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ sont d'autres fonctions analytiques définissant Z sur U. Si maintenant on définit pour tout entier r

$$f_{i,r}(x) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha^{(i)} x^\alpha \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

on obtient

$$f_i^\lambda(x) = \sum_{r \geqslant 0} \lambda^r f_{i,r}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

Mais comme les f_i^λ sont uniformément nulles sur $Z \cap U$, il en va de même des $\partial_\lambda^s f_i^\lambda(x) = \sum_{r \geqslant s} r(r-1)\dots(r-s+1)\lambda^{r-s} f_{i,r}(x)$, et donc en faisant $\lambda = 0$, on obtient $f_{i,r}(x) = 0$ uniformément sur $Z \cap U$. Réciproquement, si $x \in U$ annule tous les $f_{i,r}$, il annule aussi tous les f_i, et donc appartient à Z.

Z est donc dans une boule ouverte autour de 0 le lieu des zéros des $f_{i,r}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $r \geqslant 0$. Ceux-ci sont, étant donnée leur définition, des polynômes homogénes. Comme d'autre part $X = \pi(Z \setminus \{0\})$, il suffit de connaître Z sur n'importe quelle boule ouverte autour de 0 pour connaître X tout entier. X est donc l'ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n$ défini par les polynômes homogénes $f_{i,r}$. D'aprés le théoréme de la base de Hilbert, on peut remplacer la famille infinie $f_{i,r}$ par une sous-famille finie, et donc X est une réunion finie de variétés algébriques.

C.Q.F.D.

Corollaire 4.8.9 *Une surface de Riemann compacte est une union finie de variétés algébriques.*

En fait, on peut démontrer ce résultat d'une autre maniére, en utilisant le théoréme 4.8.3. C'est le chemin suivi dans [Š94].

5 Annexes

5.1 Analyse fonctionnelle

5.1.1 Théorème de l'application ouverte

Théorème 5.1.1 *(application ouverte)*
Soient E et F des espaces de Banach, T une application linéaire continue de E dans F. On suppose que T est surjective.
Alors T est ouverte.

Démonstration : on note B_E et B_F les boules unités fermées de E et F respectivement. Comme T est linéaire, il suffit de trouver $r > 0$ tel que

$$rB_F \subset T(B_E)$$

Pour tout entier n, on note

$$A_n = \overline{T(nB_E)}$$

A_n est fermé dans F et $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n = F$ par surjectivité. Comme F est complet, le théorème de Baire assure que l'un des A_n est d'intérieur non-vide. Par linéarité, $A_n = nA_1$, et donc $\mathring{A}_1 \neq \emptyset$. $\mathring{A}_1$ est également convexe et symétrique, donc il contient 0. Il existe donc $R > 0$ tel que

$$RB_F \subset \overline{T(B_E)} \tag{14}$$

C'est à partir de ce R que l'on va construire le r que l'on cherche. Par linéarité de T, la propriété (14) s'écrit :

$$\forall v \in F \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \textit{ tel que } \|v - Tu\|_F \leqslant \varepsilon \textit{ et } \|u\|_E \leqslant \frac{1}{R}\|v\|_F$$

On applique ce résultat à $v \in (R/2)B_F$: il existe $u_1 \in E$ tel que

$$\|u_1\|_E \leqslant \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \|v - Tu_1\|_F \leqslant \frac{R}{4}$$

on répète le procédé pour $v_1 = v - Tu_1$: il exite $u_2 \in E$ tel que

$$\|u_2\|_E \leqslant \frac{1}{4} \quad \textit{et} \quad \|v - Tu_1 - Tu_2\| \leqslant \frac{R}{8}$$

On construit en répétant le procédé une suite (u_n) d'éléments de E tel que :

$$\|u_n\|_E \leqslant 2^{-n} \quad \textit{et} \quad \left\| v - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} Tu_k \right\|_F \leqslant \frac{R}{2^{n+1}}$$

Comme l'espace E et complet, la série normalement convergente de terme général u_n est convergente. On note

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

et alors $\|u\|_E \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|u_n\|_E \leqslant 1$ et $Tu = v$ par continuité de T. On a donc

$$\frac{R}{2} B_F \subset T(B_E)$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 5.1.2 *Si E et F sont des espaces de Banach, toute bijection linéaire continue de E sur F a un inverse continu.*

5.1.2 Un théorème sur les opérateurs compacts

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant, essentiel pour la démonstration du théorème de finitude sur les opérateurs différentiels elliptiques.

Théorème 5.1.3 *Soit H un espace de Hilbert, et $S : H \to H$ un opérateur compact. On note $T = I - S$. Alors :*
- $\ker T$ *est de dimension finie*
- $T(H)$ *est fermée et* $\operatorname{coker} T = H/T(H)$ *est de dimension finie.*

Commençons par montrer que $\ker T$ est de dimension finie. $\ker T$ est un sous-espace fermé du Hilbert H, donc c'est un espace de Hilbert. La boule unité de $\ker T$ est compacte : $S_{|\ker T} = I_{\ker T}$, et S est un opérateur compact. Donc, d'après le théorème de Riesz, $\ker T$ est un espace de dimension finie.

Lemme 5.1.4 *Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert, T une application linéaire continue $H_1 \to H_2$. T est compacte si et seulement si T^* est compacte.*

Preuve : supposons que T soit compacte, et considérons (y_n^*) une suite de la boule unité de H_2^* (*i.e.* une suite de la boule unité de H_2, avec le théorème de Riesz). On pose, pour $y \in H_2$:

$$f_n(y) = < y, y_n^* >$$

Les hypothèses du théorème d'Ascoli sont vérifiées :
- Notons B la boule unité de H_1. $T(B)$ est d'adhérence compacte dans H_2 par compacité de T.
- comme pour n quelconque, $|f_n(y) - f_n(y')| \leqslant \|y - y'\|$, la suite (f_n) est équicontinue (*i.e.* $(\forall y \in H_2)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall n,\ \|y - y'\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_n(y) - f_n(y')| \leqslant \varepsilon)$).
- Pour n quelconque et $y \in T(B)$, $|f_n(y)| \leqslant \|y\|$.

donc on peut extraire (f_{n_j}) sous-suite uniformément convergente sur $T(B)$ de (f_n). Dès lors, pour la norme infinie sur $T(B)$:

$$\begin{aligned} \|T^* y_{n_i}^* - T^* y_{n_j}^*\| &= \sup_{x \in B} | < Tx, y_{n_i}^* - y_{n_j}^* > | \\ &= \sup_{x \in B} |f_{n_i}(Tx) - f_{n_j}(Tx)| \end{aligned}$$

et donc la complétude de H_1^* impose que la sous-suite $(T^* y_{n_i}^*)$ soit convergente dans H_1^*. T^* est donc compact.
La réciproque s'obtient de manière analogue.

Proposition 5.1.5 *Soit H un espace de Hilbert, T un opérateur compact de H dans lui-même. Alors l'image de $T - I$ est fermée.*

Démonstration : $\ker(T - I)$ est de dimension finie, donc

$$H = \ker(T - I) \oplus (\ker(T - I))^\perp$$

On note $V = (\ker(T - I))^\perp$. C'est un sous-espace fermé de H. On définit un opérateur linéaire continu $S : V \to H$ en posant :

$$\forall x \in V \quad Sx = Tx - x$$

S est clairement injectif, et $\operatorname{im} S = \operatorname{im}(T - I)$. Pour montrer que $\operatorname{im} S$ est fermée, on va exhiber $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in V \quad r\|x\| \leqslant \|Sx\| \tag{15}$$

(si on a une suite de Cauchy dans im S, on aura une suite de Cauchy d'antécédents dans V, sous-espace fermé d'un espace de Hilbert donc complet).
Supposons que la condition (15) soit fausse pour tout $r > 0$, et considérons alors une suite (x_n) de V telle que $\|x_n\| = 1$ et $Sx_n \to 0$. Comme T est un opérateur compact, quitte à extraire une sous-suite, il existe x_∞ tel que $Tx_n \to x_\infty$. Alors immédiatement $x_n = Tx_n - Sx_n \to x_\infty$. Donc $x_\infty \in V$ (qui est fermé), et

$$Sx_\infty = \lim Sx_n = 0$$

Par injectivité de S, $x_\infty = 0$. Mais $x_\infty = \lim x_n$ et les x_n sont de norme 1. Contradiction !
Il existe donc r qui vérifie (15), ce qui complète la preuve.

Pour l'instant, en reprenant les notations du théorème 5.1.3, on a démontré d'une part que la dimension de $\ker T$ est finie, et d'autre part que $T(H)$ est fermée.

T^* est compact lui-aussi d'après le lemme 5.1.4, donc son noyau est de dimension finie. Or

$$\ker T^* = T(H)^\perp$$

et $T(H)$ est fermée, donc

$$H = T(H) \oplus \ker T^*$$

et cette décomposition en somme orthogonale permet de dire que $\ker T^*$ et $H/T(H)$ sont isomorphes, et donc que la dimension du conoyau de T est finie, ce qui achève la démonstration.

5.2 Théorème de la base de Hilbert

Définition 5.2.1 *Un anneau A est dit noetherien si tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments.*

Remarque 5.2.2 $\mathbb{C}$ *est un anneau noetherien.*

Lemme 5.2.3 *Si A est un anneau noetherien, il n'existe pas de suite infinie strictement croissante d'idéaux de A.*

Preuve : soit (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. $\bigcup_{n\geqslant 0} I_n$ est encore un idéal de A, donc comme A est noetherien, il existe $a_1, \dots, a_m \in A$ tels que

$$\bigcup_{n\geqslant 0} I_n =< a_1, \dots, a_m >$$

Pour tout i, $a_i \in I_{n_i}$, donc $\bigcup_{n\geqslant 0} = I_{\max n_i}$ et la suite (I_n) est stationnaire.

Théorème 5.2.4 *(Hilbert) Si A est un anneau noetherien, alors $A[X]$ aussi.*

Démonstration : supposons par l'absurde qu'il existe I idéal de $A[X]$ qui ne soit engendré par aucune famille finie.

Bien sûr, $I \neq \{0\}$ donc on peut choisir $f_0 \in I$ non nul de degré minimal. On construit alors une suite (f_n) par récurrence en choisissant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_{n+1} \in I\backslash < f_0, \dots, f_n >$ (qui, par hypothèse n'est pas l'ensemble vide) de degré minimal.

On considère alors (a_n) la suite des coefficients dominants des f_n. $(< a_0, \dots, a_n >)$ est une suite croissante d'idéaux de A. Donc d'après le lemme 5.2.3, elle est stationnaire : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_{m+1} \in< a_0, \dots, a_m >$. On écrit donc

$$a_{m+1} = r_0 a_0 + \cdots + r_m a_m \qquad (r_i \in A)$$

Alors

$$f^* = f_{m+1} - \sum_{i=0}^{m} X^{\deg f_{m+1} - \deg f_i} r_i f_i$$

est un polynôme de $I \backslash < f_0, \ldots, f_m >$ de degré inférieur à $\deg f_{m+1} - 1$. Contradiction !

Références

[BDIP96] José Bertin, Jean-Pierre Demailly, Luc Illusie, and Chris Peters. *Introduction la thorie de Hodge*, volume 3 of *Panoramas et synthèses*. Société mathématique de France, 1996.

[BG03] Nicolas Burq and Patrick Gérard. Contrle optimal des quations aux drives partielles, 2003. Cours de l'école polytechnique.

[Bos00] Jean-Benoît Bost. Fonctions analytiques d'une variable complexe, 2000. Cours de l'école polytechnique.

[Bou61] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale*. Hermann, 1961.

[Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961.

[DD79] R. Douady and A. Douady. *Théories galoisiennes*. CEDIC/Fernand Nathan, 1979.

[FK80] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.

[Ful95] William Fulton. *Algebraic topology : a first course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.

[GH78] Philip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Pure and applied mathematics. John Wiley and sons, 1978.

[God58] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, 1958.

[GR65] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall, 1965.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[Lan93] Serge Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 1993.

[Las] Yves Laszlo. Introduction à l'algèbre commutative et homologique. Cours de maîtrise 2003-2004.

[Lau] François Laudenbach. Intégration et calcul différentiel. Cours de l'école polytechnique.

[Mum84] David Mumford. *Tata lectures on Theta II*. Progress in mathematics. Birkhäuser, 1984.

[Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry I : complex projective varieties*. Classics in mathematics. Springer, 1995.

[Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis*. Series in higher mathematics. Mc-Graw Hill, 1973.

[Š94] Igor R. Šafarevič. *Basic algebraic geometry 2 : schemes and complex manifolds*. Springer, 1994.

[Wel80] R.O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.