Université Paul Sabatier
Toulouse

Préparation à l'agrégation
Rentrée 2018

Échauffement estival — Algèbre linéaire

Thomas Dedieu

Dans toute cette feuille d'exercices, $\mathbf{k}$ désigne un corps arbitraire (un corps est par définition commutatif). Sauf mention explicite du contraire, les espaces vectoriels sont tous définis sur ce corps $\mathbf{k}$. Quand ce n'est pas précisé, E est un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1. 1) Soit $A = (A_1, \ldots, A_q) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{k})$ (cette notation signifie que A est la matrice constituée des colonnes $A_1, \ldots, A_r \in \mathbf{k}^p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{k})$).
a) Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_q \in \mathbf{k}$,

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = x_1.A_1 + \cdots + x_q.A_q.$$

b) Soit $B = (C_1, \ldots, C_r) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{k})$. Montrer que $A \times B = (AC_1, \ldots, AC_r)$.
2) Soit $A = {}^\mathsf{T}(A^1, \ldots, A^p) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{k})$ (cette notation signifie que A est la matrice constituée des lignes $A^1, \ldots, A^p \in {}^\mathsf{T}(\mathbf{k}^q) = \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{k})$).
a) Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_p \in \mathbf{k}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \times A = x_1.A^1 + \cdots + x_p.A^p.$$

b) Soit $B = {}^\mathsf{T}(L_1, \ldots, L_r) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbf{k})$. Montrer que $A \times B = (L_1A, \ldots, L_rA)$.
3) a) Montrer pour tout scalaires $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ l'identité

$$(x_1 \cdots x_n) \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

b) Soit

$$A = \left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_q \right) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \left(C'_1 \middle| \cdots \middle| C'_p \right) = \begin{pmatrix} L'_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L'_q \end{pmatrix}$$

deux matrices de tailles $p \times q$ et $q \times p$ respectivement. Vérifier que

$$A \times A' = \begin{pmatrix} L_1C'_1 & \cdots & L_1C'_p \\ \vdots & & \vdots \\ L_pC'_1 & \cdots & L_pC'_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' \times A = \begin{pmatrix} L'_1C_1 & \cdots & L'_1C_q \\ \vdots & & \vdots \\ L'_qC_1 & \cdots & L'_qC_q \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les tailles de ces deux matrices ?
c) Calculer $\mathrm{Tr}(AA')$ et $\mathrm{Tr}(A'A)$. Ces deux quantités sont-elles égales ?
d) Démontrer que l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^{\mathsf{T}}AB) \in \mathbf{k}$ est bilinéaire et symétrique.

Exercice 2. 1) Déterminer une base du sous-espace de $\mathbf{k}^4$ défini par les équations

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

d'un sev donné par des équations, et réciproquement.
2) Déterminer des équations définissant le sous-espace de $\mathbf{k}^4$ engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1) Soit E un espace vectoriel de dimension 2, $\det : E^2 \to \mathbf{k}$ le déterminant par rapport à une base de E fixée. Démontrer en utilisant les propriétés axiomatiques du déterminant (c'est une forme multilinéaire alternée) la formule

$$\det(x.e_1, x'.e_1 + y.e_2) = xy \det(e_1, e_2),$$

valable pour tous vecteurs $e_1, e_2 \in E$ et scalaires $x, y \in \mathbf{k}$.
2) En déduire la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire.

Exercice 4. Démontrer les formules de Cramer, en utilisant les propriétés axiomatiques du déterminant.

Exercice 5. 1) Démontrer la formule de Grassmann : pour tout sous-espaces F et G de E de dimension finie, $\dim(E) + \dim(F) = \dim(F + G) - \dim(F \cap G)$.
2) Démontrer le théorème du rang.

Exercice 6. Considérons une somme directe d'espace vectoriels $A \oplus B = E$. Soit F un sous-espace de E. Est-il vrai en général que $A \cap F \oplus B \cap F = F$? Connaissez-vous des hypothèses assurant cette égalité ?

Exercice 7. Soit $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
1) Montrer que la somme $E_1 + \cdots E_n$ est directe si et seulement si

$$\dim(E_1 + \cdots E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

2) Démontrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe ;
(ii) pour tout $i = 1, \dots, n$, $(E_1 + \cdots + E_{i-1}) \cap E_i = \{0\}$.

Exercice 8. Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
1) a) Montrer que $\ker(v \circ u) \supset \ker u$.
b) Montrer que $\ker(v \circ u) = \ker u$ si et seulement si $\ker(v) \cap \mathrm{im}(u) = \{0\}$.
2) a) Montrer que $\mathrm{im}(v \circ u) \subset \mathrm{im}(v)$.
b) Montrer que $\mathrm{im}(v \circ u) = \mathrm{im}(v)$ si et seulement si $\ker(v) + \mathrm{im}(u) = F$.

Exercice 9. Soit E, F deux espaces vectoriels.
1) Soit E' un sous-espace vectoriel de E, $u \in \mathcal{L}(E', F)$. On suppose que E' possède un supplémentaire dans E. Montrer qu'il existe $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\tilde{u}|_{E'} = u$.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose u injective, et $\mathrm{im}(u)$ possède un supplémentaire dans F. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
3) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose u surjective, et $\ker(u)$ possède un supplémentaire dans E. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$. 1) Démontrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) $f \circ f = f$;
(ii) il existe une décomposition $E = F \oplus G$ telle que f soit la projection sur F dans la direction de G.
Faire un dessin.
2) Démontrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
(i) $f \circ f = -\mathrm{id}_E$;
(ii) il existe une décomposition $E = F \oplus G$ telle que f soit la symétrie par rapport à F dans la direction de G.
Faire un dessin.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, qu'on munit d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1) On suppose que pour tout $x \in E$, $f(x)$ est proportionnel à x. Démontrer que f est une homothétie. (*Indication* : considérer les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ et $f(e_1 + \dots + e_n)$).

2) On suppose que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on a $f \circ g = g \circ f$. Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x)$ est proportionnel à x ; en déduire que f est une homothétie. (*Indication* : considérer pour tout $x \in E$ (non nul) un projecteur $p_x \in L(E)$ sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$).

Exercice 12. Soit E de dimension finie, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

Exercice 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme de rang r. Montrer que u est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) On suppose que $\ker(u)$ possède un supplémentaire F dans E, stable par u. Montrer que $F = \mathrm{im}(u)$.

2) On suppose que $\mathrm{im}(u)$ possède un supplémentaire F dans E, stable par u. Montrer que $F = \ker(u)$.

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P \in \mathbf{k}[X]$. On suppose que $P(u) = 0$, autrement dit P est un polynôme annulateur de u. Montrer que toute valeur propre de u est racine de P. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 16. Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E. On considère leurs bases duales respectives $\mathcal{B}_1^\vee, \mathcal{B}_2^\vee$; ce sont des bases de l'espace dual $E^\vee = \mathcal{L}(E, \mathbf{k})$. Démontrer la relation entre les matrices de passage :

$$\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1^\vee, \mathcal{B}_2^\vee) = {}^{\mathsf{T}}(\mathrm{Mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))^{-1}.$$

Exercice 17. 1) Démontrer que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. Voyez-vous une évidence géométrique pour ce résultat ?

2) Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectivement. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la matrice de l'application linéaire ${}^{\mathsf{T}}f : \ell \in F^\vee \mapsto (\ell \circ f) \in E^\vee$ dans les bases $\mathcal{B}_F^\vee$ et $\mathcal{B}_E^\vee$ en fonction de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Exercice 18. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de rang r de vecteurs de E. Montrer que

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{k}^n : \lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_n.e_n = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbf{k}^n$ de dimension $n - r$.

Exercice 19. Considérons $\mathbf{A}^n$ l'espace affine de dimension n sur le corps $\mathbf{k}$. Soit $A_1, \dots, A_r \in \mathbf{A}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbf{k}^r$.

1) On suppose $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$. Démontrer qu'il existe un unique point $G_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{A}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \overrightarrow{G_{\boldsymbol{\alpha}} A_i} = \vec{0}.$$

Soit $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Comparer les points $G_{\boldsymbol{\alpha}}$ et $G_{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$.

2) On suppose $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$. Démontrer que la fonction

$$M \in \mathbf{A}^n \mapsto \sum_{i=1}^r \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \in \overrightarrow{\mathbf{A}^n}$$

est constante. On note $u_{\boldsymbol{\alpha}}$ l'unique vecteur dans son image. Soit $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Comparer les vecteurs $u_{\boldsymbol{\alpha}}$ et $u_{\lambda\boldsymbol{\alpha}}$.

3) On considère à présent $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}^n$, et on fait l'hypothèse que la famille de vecteurs $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est libre. Démontrer que pour tout point $M \in \mathbf{A}^n$ il existe un unique $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{k}^{n+1}$ tel que $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$ et M est l'unique point $G_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{A}^n$ tel que $\sum_{i=0}^n \alpha_i \overrightarrow{G_{\boldsymbol{\alpha}} A_i} = \vec{0}$.

On appelle $\boldsymbol{\alpha}$ les *coordonnées barycentriques* du point M dans le repère affine $(A_0, \ldots, A_n)$. On renvoie à l'Exercice 20 pour une interprétation géométrique.

Exercice 20. 1) a) Comparer les notions de (i) déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base, (ii) déterminant d'un endomorphisme, (iii) déterminant d'une matrice.

b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et notons $n = \dim(E)$. Se convaincre que pour tous vecteurs $e_1, \ldots, e_n \in E$, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n)$ est le n-volume orienté du n-parallélépipède défini par la famille ordonnée de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$, exprimé dans l'unité de n-volume définie par la propriété que le n-volume du parallélépipède défini par $\mathcal{B}$ est égal à 1.

2) On considère le plan affine $\mathbf{A}^2$, et on suppose le plan vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{\mathbf{A}^2}$ muni d'une base $\mathcal{B}$ de référence. Pour tous vecteurs $u, v \in \overrightarrow{\mathbf{A}^2}$, on note $[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$. Soit A, B, C trois points tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants. Soit $M \in \mathbf{A}^2$.

a) Montrer que les coordonnées barycentriques du point M dans le repère affine (A, B, C) (voir Exercice 19) sont

$$\left(\frac{[\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}, \frac{[\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}, \frac{[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]} \right).$$

b) Donner une interprétation géométrique en termes des aires des triangles MBC, MAC, MAB et ABC. Faire un dessin.

c) Généraliser le résultat précédent en dimension supérieure.