Université Paul Sabatier
Toulouse

Préparation à l'agrégation
2019–2020

Examen (2h) — Groupes et représentations

Mardi 12 novembre 2019

Toute réponse doit être justifiée. Soignez la rigueur de votre argumentation et la clarté de votre rédaction.

Tous appareils électroniques et documents interdits.

Exercice 1.

1) Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dont l'action sur $[\![1, n]\!]$ induite par l'action canonique de $\mathfrak{S}_n$ est 2-transitive. Montrer que si G contient une transposition, alors $G = \mathfrak{S}_n$.

2) Démontrer la formule de Burnside : pour une action d'un groupe fini G sur un ensemble fini X, le nombre d'orbites est

$$\big|G \setminus X\big| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

3) Dans cette question, on considère un groupe fini G agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $g \in G$ on note $f(g)$ le cardinal du fixateur de g pour l'action $G \circlearrowleft X$.

a) Montrer que si G agit transitivement sur X, alors pour tout $x \in X$, $\operatorname{Stab}(x)$ est d'indice $|X|$ dans G (c'est-à-dire que le quotient $G/\operatorname{Stab}(x)$ est de cardinal $|X|$). En déduire que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)| = 1$$

(*remarque* : c'est la formule de Burnside pour $G \circlearrowleft X$).

b) Soit Δ la diagonale dans $X \times X$, c'est-à-dire

$$\Delta = \big\{(x, x) \in X \times X,\ x \in X\big\}.$$

Démontrer que Δ et son complémentaire sont stables sous l'action diagonale de G sur $X \times X$ — définie par

$$\forall g \in G,\ \forall (x, y) \in X \times X : \quad g.(x, y) = (g.x, g.y).$$

En déduire l'inégalité

( ) $$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)^2 \geqslant 2$$

(*indication* : appliquer la formule de Burnside à $G \circlearrowleft X \times X$).

c) Montrer qu'il y a égalité dans ( ) si et seulement si G agit 2-transitivement sur X.

d) On note $G^\star$ l'ensemble des éléments de G agissant sans point fixe sur X. Démontrer que si G agit transitivement sur X, alors

$$\sum_{g\in G^\star}\big(f(g)-1\big)\big(|X|-f(g)\big)\leqslant\sum_{g\in G}\big(f(g)-1\big)\big(|X|-f(g)\big)\leqslant -|G|.$$

En déduire que dans ces conditions, G possède au moins $|G|/|X|$ éléments agissant sans point fixe, et en particulier qu'il possède au moins un élément agissant sans point fixe.

Exercice 2. On considère le groupe $M=\mathbf{Z}/18\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$.

1) Déterminer des entiers $s\in\mathbf{N}$, et $1<d_1|\cdots|d_s$ tels que

$$M\cong\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}/d_s\mathbf{Z}.$$

2) Déterminer $a,b\in M$ tel que $M=\langle a,b\rangle$ (justifier votre réponse).

3) Peut-on trouver $a\in M$ tel que $M=\langle a\rangle$? (idem, comme pour toutes les questions d'ailleurs)

Exercice 3. Pour $n\in\mathbf{N}_{>2}$ on considère le groupe diédral D_n des isométries de $\mathbf{R}^2$ euclidien laissant stable le polygône défini par les n points $r^k(1,0)$, $k=0,\dots,n-1$, où r est la rotation de centre 0 et d'angle $2\pi/n$. Pour tout $k\in\mathbf{Z}$, on appelle s_k la réflexion par rapport à la droite formant un angle $k\pi/n$ avec l'axe des abscisses. On note $s=s_0$. On a

$$\mathrm{D}_n=\big\{1,r,\dots,r^{n-1},s_0,s_1,\dots,s_{n-1}\big\}.$$

1) a) Faire un dessin.

b) Montrer que $r^ks=s_k$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$.

c) Montrer que $rs_kr^{-1}=s_{k+2}$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$.

d) Montrer que $s_krs_k=r^{-1}$ et $ss_ks=s_{-k}$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$.

e) Soit $a\in\mathbf{Z}$. Démontrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $f_a:\mathrm{D}_n\to\mathrm{D}_n$ tel que $f_a(r)=r^a$ et $f_a(s)=s$.

2) On considère le cas $n=5$. Dans cette question on dresse la table de caractères de D_5.

a) Déterminer les quatre classes de conjugaison de D_5 (justifier votre réponse).

b) Montrer que le déterminant donne une représentation irréductible de D_5.

c) Donner le caractère de la représentation standard ρ_{st} de dimension 2 de D_5. Montrer que cette représentation est irréductible. (On pourra utiliser sans preuve que $\cos(2\pi/5)=(-1+\sqrt5)/4$ et $\cos(4\pi/5)=(-1-\sqrt5)/4$).

d) Déterminer le caractère de $\rho_{\mathrm{st}}\circ f_2$. En déduire que $\rho_{\mathrm{st}}\circ f_2$ est irréductible (f_2 est le morphisme de la question 1e).

3) On considère le cas $n=4$. On donne la table de caractères de D_4.

8 D_4	1 $\{1\}$	1 $\{r^2\}$	2 $\{r,r^3\}$	2 $\{s,r^2s\}$	2 $\{rs,r^3s\}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
det	1	1	1	-1	-1
a	1	1	-1	1	-1
a'	1	1	-1	-1	1
standard	2	-2	0	0	0

Déterminer la décomposition en sous-représentations irréductibles de $\rho_{\mathrm{st}}\circ f_2$, où ρ_{st} est la représentation standard de dimension 2 de D_4.