Université Paul Sabatier
Toulouse

Préparation à l'agrégation
Vendredi 14 septembre 2018

Examen (2h) — Groupes

Vendredi 14 septembre 2018

Toute réponse doit être justifiée. Soignez la rigueur de votre argumentation et la clarté de votre rédaction.

Tous appareils électroniques et documents interdits.

Exercice 1. 1) Démontrer le théorème de Lagrange : soit G un groupe fini. Pour tout sous-groupe $H < G$, l'ordre de H divise l'ordre de G.

2) Soit G un groupe, $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Montrer que l'ensemble quotient G/K est muni d'une structure de groupes induite par la structure de groupe de G. Montrer que l'application $\pi : x \in G \mapsto \bar{x} \in G/K$ est un morphisme de groupes surjectif.

3) Soit G un groupe, $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Soit H un groupe, et $\phi : G \to H$ un morphisme. On suppose que $\phi(K) = \{1_H\}$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\bar{\phi} : G/K \to H$ tel que $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, où π est le morphisme canonique $G \to G/K$ construit à la question 2.

Exercice 2. 1) Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ est monogène.

2) Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est monogène.

3) Déterminer l'ordre de $\overline{114}$ dans $(\mathbf{Z}/252\mathbf{Z}, +)$.

4) Démontrer que $(\mathbf{Q}, +)$ n'est pas de type fini.

5) Les deux groupes

$$\mathbf{Z}/14\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}/28\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$$

sont-ils isomorphes ?

6) Soit N le sous-groupe de $\mathbf{Z}^3$ engendré par $(1, 4, 6)$, $(6, 1, 4)$, et $(6, 6, 0)$. Déterminer auxquels des sous-groupes de la question 5 le quotient $\mathbf{Z}^3/N$ est isomorphe.

7) On considère le sous-groupe $N < \mathbf{Z}^4$ engendré par $(1, 7, 7, 7)$, $(1, 8, 5, 5)$ et $(1, 4, 0, 9)$. Démontrer sans calcul que le quotient $\mathbf{Z}^4/N$ contient un élément d'ordre infini.

Exercice 3. 1) On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 11 & 6 & 2 & 1 & 10 & 5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{11}.$$

Calculer σ^{2019}.

2) Donner la liste des classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_5$. Indiquer pour chacune son cardinal.

3) Démontrer que tous les 3-cycles de $\mathfrak{S}_5$ sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.

4) Soit G un groupe arbitraire, $H < G$ un sous-groupe. On considère les actions $G \circlearrowleft G$ et $H \circlearrowleft H$ par conjugaison. Soit $h \in H$. Démontrer que

$$\mathrm{Stab}_H(h) = \mathrm{Stab}_G(h) \cap H,$$

où Stab_G (resp. Stab_H) désigne le stabilisateur relativement à l'action $G \circlearrowleft G$ (resp. $H \circlearrowleft H$).

5) On considère à présent les actions $\mathfrak{S}_5 \circlearrowleft \mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5 \circlearrowleft \mathfrak{A}_5$ par conjugaison. Soit $\kappa \in \mathfrak{A}_5$ un 5-cycle.
a) Démontrer que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_5}(\kappa) = \langle \kappa \rangle$.
b) En déduire que $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_5}(\kappa) \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.
c) Combien y a-t-il de classes de conjugaison de 5-cycles dans $\mathfrak{A}_5$?
d) Exhiber deux 5-cycles qui ne sont pas conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.