Université Paul Sabatier
Toulouse

Préparation à l'agrégation
2019–2020

Examen (2h) — Algèbre linéaire

Lundi 23 septembre 2019

Toute réponse doit être justifiée. Soignez la rigueur de votre argumentation et la clarté de votre rédaction.

Tous appareils électroniques et documents interdits.

Dans toute la suite, $\mathbf{k}$ est un corps, et E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1. Dans cet exercice, on redémontre un résultat du cours. Il faut le faire avec honnêteté intellectuelle pour obtenir les points (ne pas tricher en utilisant un énoncé plus fort pour court-circuiter les questions ; tout ce qui est postérieur à Cayley–Hamilton est interdit).

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sous-espace vectoriel de E stable par f. On note f_F et $\bar{f}_F$ les endomorphismes de F et E/F respectivement induits par f.
a) Montrer que pour tout $P \in \mathbf{k}[X]$, on a

$$P(f_F) = P(f)_F \quad \text{et} \quad P(\bar{f}_F) = \overline{P(f)}_F.$$

b) En déduire que μ_{f_F} et $\mu_{\bar{f}_F}$ divisent tous les deux μ_f.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que si χ_f est scindé, alors μ_f est scindé.

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que μ_f est scindé.
a) Montrer que f possède une valeur propre.
b) Montrer par récurrence sur $\dim(E)$ que f est trigonalisable.
c) En déduire que χ_f est scindé.

4) Démontrer que χ_f et μ_f ont les mêmes racines.

Exercice 2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ distincts. Donner un représentant de toutes les classes de similitude de matrices de $\mathcal{M}_5(\mathbf{k})$ dont le polynôme minimal est $(X-\lambda)^2(X-\mu)$. Bien justifier que les matrices que vous donnerez sont deux à deux non semblables.

Exercice 3.

1) Soit $n \geqslant 1$. On considère la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ définie par

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } j \leqslant i \\ i & \text{si } j > i. \end{cases}$$

a) Montrer que A_3 est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que la matrice

$$P_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$$

est inversible, puis calculer $P_n \times A_n$.
c) Montrer que A_n est inversible pour tout $n \geqslant 1$.

2) On considère $F_1, \dots, F_r$ sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} F_i$.
a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i = 1, \dots, r$, F_i est stable par g. Montrer que

$$\ker(g) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \big(\ker(g) \cap F_i\big).$$

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i = 1, \dots, r$, F_i est stable par f. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{k}[X]$,

$$\ker\big(P(f)\big) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \big(\ker(P(f)) \cap F_i\big).$$

3) On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{k}^r$ défini par la multiplication à gauche par la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\dim\big(\ker(f^i)\big)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $b_1, \dots, b_n$ ($n = \dim(E)$) des entiers. On suppose qu'il existe une décomposition

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant r \leqslant n} \bigoplus_{1 \leqslant a \leqslant b_r} F_{r,a}$$

telle que chaque $F_{r,a}$ est de dimension r et stable par f, et $f_{F_{r,a}}$ est semblable à l'endomorphisme de $\mathbf{k}^r$ de la question 3.
a) En utilisant les questions 2b et 3, calculer $k_i := \dim\big(\ker(f^i)\big)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. En déduire que

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = A_n \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

où A_n est la matrice de la question 1.
b) Conclure que s'il existe une autre décomposition

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant r \leqslant n} \bigoplus_{1 \leqslant a \leqslant b'_r} F'_{r,a}$$

telle que chaque $F'_{r,a}$ est de dimension r et stable par f, et $f_{F'_{r,a}}$ est semblable à l'endomorphisme de $\mathbf{k}^r$ de la question 3, alors $b_i = b'_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Félicitations, vous venez de démontrer la partie hors-programme du Théorème de Jordan !