

Exercice 1

1) a) f_F et $\overline{f_F}$ sont définis respectivement par

$$\forall \alpha \in F \quad f_F(\alpha) = f(\alpha) \in F$$

$$\forall \alpha \in E \quad \overline{f_F}(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} \in E/F.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On écrit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, $n = \deg P$ ($a_n \in \mathbb{K}^*$).
(si $P=0$, le résultat est trivial).

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } k, \quad f_F^k(\alpha) &= f_F \circ \dots \circ f_F(\alpha) \\ &= f \circ \dots \circ f(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in F \\ &= f^k(\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{et de même } \overline{f_F^k}(\overline{\alpha}) = \overline{f^k(\alpha)} \quad \text{pour tout } \alpha \in E$$

$$\text{On en déduit } P(f_F)(\alpha) = P(f)(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in F$$

$$\text{et } P(\overline{f_F})(\overline{\alpha}) = \overline{P(f)(\alpha)} \quad \text{pour tout } \alpha \in E.$$

$$\text{Conclusion: } P(\overline{f_F}) = \overline{P(f)_F} \quad \text{et} \quad P(f_F) = P(f)_F.$$

b) D'après la question a), si $P \in \mathbb{K}[X]$ annule f , alors il annule aussi f_F et $\overline{f_F}$, donc $P f_F / P$ et $P \overline{f_F} / P$.
Puisque $P f$ annule f , on a bien $P f_F / P f$ et $P \overline{f_F} / P f$.

2) Supposons χ scindé, et montrons que tout facteur irréductible de ν est de degré 1 (ceci prouvera que ν est scindé).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ facteur irréductible de ν .

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, ν / χ donc P / χ .

Or χ est scindé, donc tous ses facteurs irréductibles ont degré 1.

Ainsi $\deg P = 1$ comme il fallait.

3) a) Nécessairement $\deg(p) > 0$, donc p possède un facteur irréductible, et ainsi une racine puisque il est scindé.

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $p|X$ donc χ possède lui aussi une racine. Ainsi f possède une valeur propre.

b) Montrons par récurrence sur $n = \dim(E) \geq 0$ que f est trigonalisable.
- si $n=0$, tout endomorphisme de E est trigonalisable, donc f l'est.
- supposons l'énoncé vrai pour tout $g \in \mathcal{L}(H)$, $\dim(H) < n$
($\forall g$ scindé $\Rightarrow g$ trigonalisable).

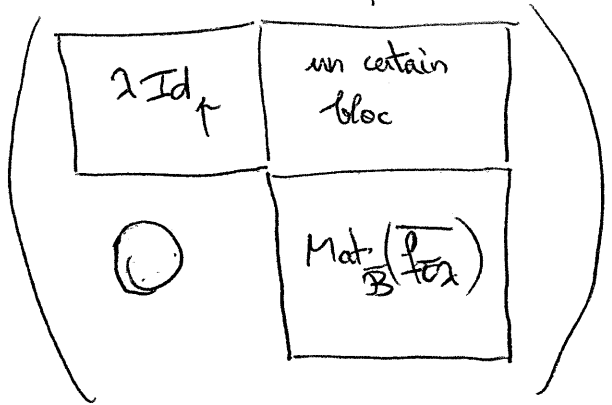
D'après la question a), f possède une valeur propre $\lambda \in K$. Soit $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})$.
D'après 1b), $\overline{p|_{E_\lambda}} / \overline{p}$ donc $\overline{p|_{E_\lambda}}$ est scindé (E_λ est stable par f , comme tout sous-espace propre).

Puisque λ est valeur propre, $\dim(E_\lambda) > 0$ donc
 $\dim(E/E_\lambda) < \dim E$.

Ainsi $\overline{f|_{E/E_\lambda}}$ est réductible de l'hypothèse de récurrence. Considérons donc

$\overline{f|_{E/E_\lambda}} \in \mathcal{L}(E/E_\lambda)$
 $\overline{B} = (\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_q)$ une base trigonalisante pour $\overline{f|_{E/E_\lambda}}$ de E/E_λ .

Pour toute base $B = (e_1, \dots, e_p)$ de E_λ , $(e_1, \dots, e_p, e_1, \dots, e_q)$ est une base de E , et la matrice de f dans cette base est



Cette matrice est triangulaire supérieure, donc f est trigonalisable.

c) Puisque le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ est $\prod \alpha_i$,
 $\det(X \text{Id} - f)$ est un produit de monômes, donc χ_f est scindé.

4) D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $p|X$ donc les racines de p sont racines de χ
 (ceci se démontre facilement sans Cayley-Hamilton, mais c'est trop tard)

D'autre part soit λ racine de χ . Alors λ est valeur propre de f , donc il existe $\alpha \in E - \{0\}$ tq $f(\alpha) = \lambda \cdot \alpha$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(\alpha) = P(\lambda) \cdot \alpha$
 donc $p(f)(\alpha) = p(\lambda) \cdot \alpha = 0$.

Puisque $\alpha \neq 0$, ceci impose $p(\lambda) = 0$, c'est-à-dire λ racine de p .

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ tq $\chi_A = (X-\lambda)^2(X-\mu)$

On sait que $\mathbb{K}^5 = \ker(A-\lambda Id)^2 \oplus \ker(A-\mu Id)$ (lemme des noyaux)

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, on note $k_i(a) = \dim \ker(A-a Id)^i$
 et tout $i \in \mathbb{N}$

On a $k_i(\lambda) = k_i(\mu)$ pour tout $i \geq 2$ $k_2(\lambda) + k_1(\mu) = 5$.
 $k_1(\mu) = k_i(\mu) \quad i \geq 1$
 $k_i(a) = 0$ pour $a \notin \{\lambda, \mu\}$ pour tout i .

On a d'autre part les inégalités

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_1(\lambda) &\leq k_2(\lambda), \text{ nécessairement stricte puisque } (X-\lambda)(X-\mu) \text{ n'annule pas } A \\ \Rightarrow k_1(\lambda) - k_0(\lambda) &\geq k_2(\lambda) - k_1(\lambda) \geq k_3(\lambda) - k_2(\lambda) \\ &\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ k_1(\lambda) &\geq k_2(\lambda) - k_1(\lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

Ceci laisse possible seulement les cas suivants.

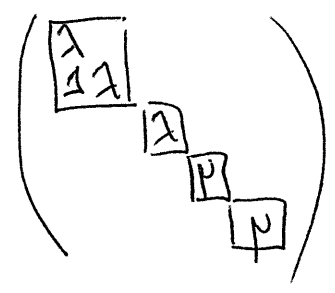
① $k_2(\lambda) = 4, k_1(\mu) = 1$

ⓐ $k_2(\lambda) = 2$. Un exemple est $A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & & \\ & \boxed{\lambda} & & & \\ & & \boxed{\lambda} & & \\ & & & \boxed{\mu} & \\ & & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$

ⓑ $k_2(\lambda) = 3$ \longrightarrow $A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & & \\ & \boxed{\lambda} & & & \\ & & \boxed{\lambda} & & \\ & & & \boxed{\mu} & \\ & & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$

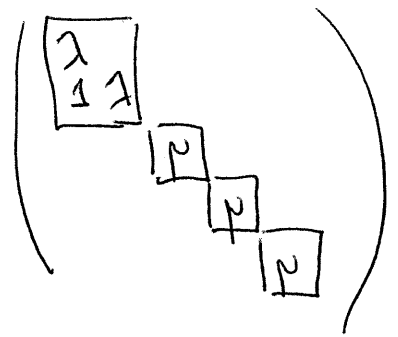
② $k_2(\lambda) = 3, k_1(\mu) = 2.$

Nécessairement $k_1(\lambda) = 2.$ Un exemple est



③ $k_2(\lambda) = 2, k_1(\mu) = 3.$

Nécessairement $k_2(\mu) = 1.$ Un exemple est



Deux matrices A annulées par $(X-\lambda)^2(X-\mu)$ sont semblables si et seulement si elles ont mêmes invariants $k_i(\lambda)$ et $k_i(\mu)$. On a donc bien obtenu 4 classes de similitude distinctes deux à deux.

Exercice 3

1) a) On résout le système $A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Id_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par le pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A_3 X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède l'unique solution

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc A_3 est inversible d'inverse la matrice ci-dessus.

b) La matrice

$$P_n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & & \boxed{I_{n-2}} & \end{pmatrix}$$

est triangulaire inférieure par blocs, de blocs diagonaux inversibles $\left(\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} = 1 \right)$
donc elle est elle-même inversible.

La matrice $P_n A_n$ s'obtient en effectuant des opérations sur les lignes de A_n :

$$\begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ -L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \\ \vdots \\ -L_1 + L_n \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

c) • A_3 est inversible.

• Supposons A_{n-1} inversible. D'après b), $P_n A_n = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{A_{n-1}} & \end{pmatrix}$

donc $P_n A_n$ est inversible. Ainsi A_n inversible puisque P_n inversible.

2) a) La somme des $(\ker g) \cap F_i$ est directe, car somme de sev de F_1, \dots, F_r qui sont eux-mêmes en somme directe.

Elle est contenue dans $\ker(g)$, comme somme de sev de $\ker(g)$.

Il reste seulement à démontrer l'inclusion inverse. Soit $x \in \ker(g)$.

Il existe x_1, \dots, x_r vecteurs de F_1, \dots, F_r respectivement, tels que

$$x = x_1 + \dots + x_r. \quad (*)$$

$$\text{Alors } 0 = g(x) = g(x_1) + \dots + g(x_r). \quad (**)$$

Puisque les F_i sont stables par g , on a $g(x_i) \in F_i$ pour tout $i=1, \dots, r$.

Puisque les F_i sont en somme directe, la relation $**$ impose donc

$$g(x_1) = \dots = g(x_r) = 0$$

c'est-à-dire $x_i \in \ker(g)$ pour tout i .

Ainsi d'après $(*)$ $x \in \sum \ker(g) \cap F_i$.

b) Si F_i est stable par f , alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ laisse F_i stable. On peut donc appliquer a) à $g = P(f)$, ce qui donne le résultat.

3). On a pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$

$$(\mathcal{J}_n)^i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{r-i} \end{pmatrix} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \ker(\mathcal{J}_n^i) \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_{r-i} = 0$$

Cet espace est défini par $r-i$ équations linéaires manifestement indépendantes, donc a dimension $r - (r-i) = i$.

Pour $i \geq r$, $\ker(\mathcal{J}_n^i) \supseteq \ker(\mathcal{J}_n^r) = \mathbb{K}^r$, donc $\ker(\mathcal{J}_n^i) = \mathbb{K}^r$.

On a donc

$$\dim(\ker(f^i)) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq r \\ r & \text{si } i \geq r \end{cases} = \text{Min}(i, r).$$

4) a) On a pour tout $i \geq 1$

$$\ker(f^i) = \bigoplus_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq a \leq b_r}} \ker(f_{F_{r,a}}^i) \quad \text{d'après 2b)}$$

$$\text{donc } k_i = \sum \dim \ker(f_{F_{r,a}}^i)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq a \leq b_r}} \text{Min}(i, r) \quad \text{d'après 3)}$$

$$= \sum_{1 \leq r \leq n} b_r \text{Min}(i, r) = \sum_{1 \leq r \leq i} b_r i + \sum_{i+1 \leq r \leq n} b_r r$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + \dots + b_n \\ b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_n \\ \vdots \\ b_1 + 2b_2 + \dots + n \cdot b_n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Puisque la matrice A_n est inversible, il suit de la question précédente que b_1, \dots, b_n sont uniquement déterminées par k_1, \dots, k_n .
Ces derniers étant des invariants de similitude, b_1, \dots, b_n ne dépendent pas du choix de la décomposition

$$E = \bigoplus \bigoplus F_{r,a}$$