Algèbre Linéaire
Examen Septembre 2019

Exercice 1

1) a) f_F et $\overline{f_F}$ sont définis respectivement par

$$\forall x \in F \quad f_F(x) = f(x) \in F$$
$$\forall x \in E \quad \overline{f_F}(\bar{x}) = \overline{f(x)} \in E/_F .$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On écrit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, $n = \deg P$ $(a_n \in \mathbb{K}^*)$.
(si $P=0$, le résultat est trivial).

Pour tout entier k,
$$\begin{aligned} f_F^k(x) &= f_F \circ \cdots \circ f_F(x) \\ &= f \circ \cdots \circ f(x) \quad \text{pour tout } x \in F \\ &= f^k(x) \end{aligned}$$

et de même $\overline{f_F}^k(\bar{x}) = \overline{f^k(x)}$ pour tout $x \in E$

On en déduit $P(f_F)(x) = P(f)(x)$ pour tout $x \in F$

et $P(\overline{f_F})(\bar{x}) = \overline{P(f)(x)}$ pour tout $x \in E$.

Conclusion: $P(f_F) = P(f)_F$ et $P(\overline{f_F}) = \overline{P(f)_F}$.

b) D'après la question a), si $P \in \mathbb{K}[X]$ annule f, alors il annule aussi f_F et $\overline{f_F}$, donc $\mu_{f_F} | P$ et $\mu_{\overline{f_F}} | P$.
Puisque μ_f annule f, on a bien $\mu_{f_F} | \mu_f$ et $\mu_{\overline{f_F}} | \mu_f$.

2) Supposons χ scindé, et montrons que tout facteur irréductible de μ est de degré 1 (ceci prouvera que μ est scindé).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ facteur irréductible de μ.
D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $\mu | \chi$ donc $P | \chi$.
Or χ est scindé, donc tous ses facteurs irréductibles ont degré 1.
Ainsi $\deg P = 1$ comme il fallait.

3) a) Nécessairement $\deg(\mu) > 0$, donc μ possède un facteur irréductible, et ainsi une racine puisqu'il est scindé.
D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $\mu | \chi$ donc χ possède lui aussi une racine. Ainsi f possède une valeur propre.

b) Montrons par récurrence sur $n = \dim(E) \geq 0$ que f est trigonalisable.

- si $n=0$, tout endomorphisme de E est trigonalisable, donc f l'est.
- supposons l'énoncé vrai pour tout $g \in \mathcal{L}(H)$, $\dim(H) < n$
  (μ_g scindé $\Rightarrow$ g trigonalisable).

D'après la question a), f possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$.
D'après 1b), $\mu_{\overline{f_{E_\lambda}}} \mid \mu$ donc $\mu_{\overline{f_{E_\lambda}}}$ est scindé (E_λ est stable par f, comme tout sous-espace propre).
Puisque λ est valeur propre, $\dim(E_\lambda) > 0$ donc

$$\dim\left(E/E_\lambda\right) < \dim E.$$

Ainsi $\overline{f_{E_\lambda}} \in \mathcal{L}(E/E_\lambda)$ est redevable de l'hypothèse de récurrence. Considérons donc
$\overline{\mathcal{B}} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_q})$ une base de E/E_λ trigonalisante pour $\overline{f_{E_\lambda}}$.

Pour toute base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de E_λ, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$ est une base de E, et la matrice de f dans cette base est

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I d_p & \text{un certain bloc} \\ \hline 0 & \operatorname{Mat}_{\overline{\mathcal{B}}}\left(\overline{f_{E_\lambda}}\right) \end{array}\right).$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc f est trigonalisable.

c) Puisque le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est $\prod \alpha_i$,
$\det(Xid - f)$ est un produit de monômes, donc χ_f est scindé.

4) D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $\mu | \chi$ donc les racines de μ sont racines de χ

(ceci se démontre facilement sans Cayley-Hamilton, mais c'est trop tard)

D'autre part soit λ racine de χ. Alors λ est valeur propre de f, donc il existe $x \in E - \{0\}$ tq $\quad f(x) = \lambda . x$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\quad P(f)(x) = P(\lambda).x$

donc $\quad \mu(f)(x) = \mu(\lambda).x = 0$.

Puisque $x \neq 0$, ceci impose $\mu(\lambda) = 0$, c'est-à-dire λ racine de μ.

Exercice 2 $\qquad$ Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ tq $\mu_A = (X-\lambda)^2 (X-\mu)$

On sait que $\mathbb{K}^5 = \ker(A - \lambda Id)^2 \oplus \ker(A - \mu Id)$ $\qquad$ (lemme des noyaux)

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, on note $k_i(a) = \dim \ker (A - a\, Id)^i$.
et tout $i \in \mathbb{N}$

On a
$$k_i(\lambda) = k_2(\lambda) \text{ pour tout } i \geq 2$$
$$k_1(\mu) = k_i(\mu) \quad \text{———} \quad i \geq 1$$
$$k_i(a) = 0 \text{ pour } a \notin \{\lambda, \mu\} \text{ pour tout } i.$$
$$k_2(\lambda) + k_1(\mu) = 5.$$

On a d'autre part les inégalités

* $\quad k_1(\lambda) \leq k_2(\lambda)$, nécessairement stricte puisque $(X-\lambda)(X-\mu)$ n'annule pas A

** $\quad k_1(\lambda) - k_0(\lambda) \geq k_2(\lambda) - k_1(\lambda) \geq k_3(\lambda) - k_2(\lambda)$

$$\begin{array}{ccccc} k_1(\lambda) - k_0(\lambda) & \geq & k_2(\lambda) - k_1(\lambda) & \geq & k_3(\lambda) - k_2(\lambda) \\ \| & & & & \| \\ k_1(\lambda) & \geq & k_2(\lambda) - k_1(\lambda) & \geq & 0 \end{array}$$

Ceci laisse possible seulement les cas suivants.

① $k_2(\lambda) = 4$, $k_1(\mu) = 1$

ⓐ $k_1(\lambda) = 2$. Un exemple est $\quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$

ⓑ $k_1(\lambda) = 3$ $\quad$ ——— $\quad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \boxed{\lambda} & \\ & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$

② $k_2(\lambda)=3$, $k_1(\mu)=2$.

Nécessairement $k_1(\lambda)=2$. Un exemple est

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & \\ 1 & \lambda\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \boxed{\mu} & \\ & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$$

③ $k_2(\lambda)=2$, $k_1(\mu)=3$.

Nécessairement $k_1(\lambda)=1$. Un exemple est

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & \\ 1 & \lambda\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\mu} & & \\ & & \boxed{\mu} & \\ & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix}$$

Deux matrices A annulées par $(X-\lambda)^2(X-\mu)$ sont semblables si et seulement si elles ont mêmes invariants $k_i(\lambda)$ et $k_i(\mu)$. On a donc bien obtenu 4 classes de similitude distinctes deux à deux.

Exercice 3

1) a) On résout le système $A_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = Id_3\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ par le pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 2 & & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} L_1-L_2 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \quad L_2 - L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, $A_3 X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède l'unique solution

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc A_3 est inversible d'inverse la matrice ci-dessus.

b) La matrice

$$P_n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \\ \begin{matrix} -1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & 0 \end{matrix} & \boxed{Id_{n-2}} \end{pmatrix}$$

est triangulaire inférieure par blocs, de blocs diagonaux inversibles $\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right)$ donc elle est elle-même inversible.

La matrice $P_n \times A_n$ s'obtient en effectuant des opérations sur les lignes de A_n :

$$\begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ -L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \\ \vdots \\ -L_1 + L_n \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

c) • A_1 est inversible.
• Supposons A_{n-1} inversible. D'après b), $P_n A_n = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix}$

donc $P_n A_n$ est inversible. Ainsi A_n inversible puisque P_n inversible.

2) a) La somme des $(\ker g) \cap F_i$ est directe, car somme de sev de $F_1, \dots, F_r$ qui sont eux-mêmes en somme directe.

Elle est contenue dans $\ker(g)$, comme somme de sev de $\ker(g)$.

Il reste seulement à démontrer l'inclusion inverse. Soit $x \in \ker(g)$.

Il existe $x_1, \dots, x_r$ vecteurs de $F_1, \dots, F_r$ respectivement, tels que

$$x = x_1 + \dots + x_r. \quad (*)$$

Alors $\quad 0 = g(x) = g(x_1) + \dots + g(x_r). \quad (\ast\!\ast)$

Puisque les F_i sont stables par g, on a $g(x_i) \in F_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

Puisque les F_i sont en somme directe, la relation $(\ast\!\ast)$ impose donc

$$g(x_1) = \dots = g(x_r) = 0$$

c'est-à-dire $x_i \in \ker(g)$ pour tout i.

Ainsi d'après $(*)$ $\quad x \in \sum \ker(g) \cap F_i$.

b) Si F_i est stable par f, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ laisse F_i stable.

On peut donc appliquer a) à $g = P(f)$, ce qui donne le résultat.

3). On a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$

$$(J_r)^i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{r-i} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \ker(J_r^i) \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_{r-i} = 0$$

Cet espace est défini par $r-i$ équations linéaires manifestement indépendantes, donc a dimension $r - (r-i) = i$.

Pour $i \geq r$, $\quad \ker(J_r^i) \supseteq \ker(J_r^r) = \mathbb{K}^r$, donc $\ker(J_r^i) = \mathbb{K}^r$.

On a donc

$$\dim\left(\ker(f^i)\right) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq r \\ r & \text{si } i \geq r. \end{cases} = \operatorname{Min}(i, r).$$

4) a) On a pour tout $i \geq 1$

$$\ker(f^i) = \bigoplus_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq a \leq b_r}} \ker\left(f_{F_{r,a}}^{\,i}\right) \qquad \text{d'après 2b)}$$

donc $$k_i = \sum \dim \ker\left(f_{F_{r,a}}^{\,i}\right)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq a \leq b_r}} \mathrm{Min}\,(i, r) \qquad \text{d'après 3)}$$

$$= \sum_{1 \leq r \leq n} b_r \,\mathrm{Min}\,(i,r) = \sum_{1 \leq r \leq i} b_r \, i + \sum_{1+i \leq r \leq n} b_r \, r$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + \cdots + b_n \\ b_1 + 2b_2 + \cdots + 2b_n \\ \vdots \\ b_1 + 2b_2 + \cdots n.b_n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Puisque la matrice A_n est inversible, il suit de la question précédente que $b_1, \ldots, b_n$ sont uniquement déterminés par $k_1, \ldots, k_n$.
Ces derniers étant des invariants de similitude, $b_1, \ldots, b_n$ ne dépendent pas du choix de la décomposition

$$E = \bigoplus \bigoplus F_{r,a}.$$