UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION
VENDREDI 9 NOVEMBRE 2018

Examen (2h) — Algèbre linéaire et bilinéaire

Vendredi 9 novembre 2018

Toute réponse doit être justifiée. Soignez la rigueur de votre argumentation et la clarté de votre rédaction.

Tous appareils électroniques et documents interdits.

Exercice 1.

1) Décrire précisément, et en la justifiant rigoureusement, une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

2) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{7}{2} \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & \frac{4}{3} & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.

1) Soit $\mathbf{k}$ un corps de caractéristique différente de 2, et E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension 2. On considère une forme quadratique q sur E, non dégénérée, et possédant un vecteur isotrope non trivial. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer que pour toute forme quadratique q non dégénérée sur $\mathbf{C}^{2n}$, il existe une base dans laquelle la matrice de q est diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} U & & \\ & \ddots & \\ & & U \end{pmatrix}$$

avec U comme en (2.1).

b) En déduire que pour toute forme quadratique q non dégénérée sur $\mathbf{C}^{2n}$, il existe une base dans laquelle la matrice de q s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id}_n \\ \hline \mathrm{Id}_n & 0 \end{array}\right).$$

3) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{R}^{2n}$. Donner, en la justifiant, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base dans laquelle la matrice de q est diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} U & & \\ & \ddots & \\ & & U \end{pmatrix}$$

avec U comme en (2.1).

4) Déterminer pour chaque classe d'équivalence $[q]$ de formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbf{R}^{2n}$ la dimension maximale d'un sous-espace totalement isotrope pour q, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^{2n}$ tel que la restriction $q|_F$ est identiquement nulle.

Exercice 3.

1) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Donner un représentant de chacune des classes de similitude dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ constituées de matrices ayant α comme unique valeur propre.

2) Pour chaque classe $\overline{A}$ comme dans la question précédente, calculer :
a) les polynômes caractéristique et minimal χ_A et μ_A ;
b) pour tout $\beta \in \mathbf{C}$ et $i \in \mathbf{N}$, la dimension du noyau de $(\beta \mathrm{Id}_4 - A)^i$;
c) les invariants de similitude de A.

3) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer deux matrices $A', A'' \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ qui ne sont pas semblables, mais qui sont telles que pour $A = A', A''$:

$$\text{(i)}\ \dim\big(\ker(\alpha \mathrm{Id}_4 - A)^i\big) = \begin{cases} i & \text{si } i \leqslant 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \qquad \text{et (ii)}\ \dim\big(\ker(\beta \mathrm{Id}_4 - A)^i\big) = 0$$

pour tout $\beta \in \mathbf{R} - \{\alpha\}$ et tout $i \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{k}$ un corps. On note simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, $\mathcal{M}_n$, GL_n pour $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{k})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ respectivement, pour tous entiers $m, n \in \mathbf{N}^*$.

1) Soit $p, q, r, s \in \mathbf{N}^*$. On considère $A \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}$. À quelle condition le produit matriciel AB est-il défini ? lorsque cette condition est vérifiée, indiquer le nombre de colonnes de la matrice AB, et exprimer ces colonnes en fonction des colonnes de la matrice A. (On ne demande pas de démontrer ces formules).

2) Soit $n, a \in \mathbf{N}^*$, et considérons $M \in \mathrm{GL}_n$. Montrer que pour tout $M' \in \mathcal{M}_{n,a}$ il existe une unique matrice H, dont on déterminera la taille, telle que $M' = MH$.

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $r \in [\![1, n]\!]$, et $M, M' \in \mathcal{M}_{n,r}$. On suppose que M et M' sont toutes les deux de rang r. On note $M_1, \dots, M_r \in \mathbf{k}^n$ (resp. $M'_1, \dots, M'_r \in \mathbf{k}^n$) les colonnes de M (resp. M'). Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
(i) il existe $H \in \mathrm{GL}_r$ tel que $M' = M \times H$;
(ii) $\mathrm{Vect}(M_1, \dots, M_r) = \mathrm{Vect}(M'_1, \dots, M'_r)$.

4) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On considère l'ensemble P des matrices de GL_{n+1} triangulaires supérieures par blocs

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B' \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathrm{GL}_p$ et $B \in \mathrm{GL}_{n+1-p}$.
a) Montrer que P est un sous-groupe de GL_{n+1}.

b) Soit $M, M' \in \mathrm{GL}_{n+1}$. On note $M_1, \ldots, M_{n+1} \in \mathbf{k}^{n+1}$ (resp. $M'_1, \ldots, M'_{n+1} \in \mathbf{k}^{n+1}$) les colonnes de M (resp. M'). Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe $H \in P$ tel que $M' = M \times H$;
(ii) $\mathrm{Vect}(M_1, \ldots, M_p) = \mathrm{Vect}(M'_1, \ldots, M'_p)$.

(*Remarque.* Ceci permet de démontrer que l'ensemble quotient $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{k})/P$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathbf{k}^{n+1}$.)