Formes quadratiques

Devoir maison pour le mercredi 23 janvier 2019

Toute réponse doit être justifiée. Soignez la rigueur de votre argumentation et la clarté de votre rédaction.

Tous appareils électroniques et documents interdits.

Dans tout le texte, $\mathbf{k}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2, et E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{Q}(E)$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel des formes quadratiques sur E. Habituellement pour $q \in \mathcal{Q}(E)$, on note b la forme bilinéaire associée.

Exercice 1. 1) Donner la définition d'une forme quadratique non-dégénérée.

2) Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Donner la définition de l'orthogonal de F relativement à q, noté $F^\perp$.

b) Démontrer que si q est non-dégénérée, alors

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F).$$

3) Dans cette question on suppose $n = 4$, et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E. On considère q la forme quadratique donnée dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que q est non-dégénérée.

b) Dans chacun des cas suivants, calculer $F^\perp$ et $F \cap F^\perp$, et donner la matrice de $q|_F$ dans une base de votre choix :

i) $F = \mathrm{Vect}(e_1)$;
ii) $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$;
iii) $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$;
iv) $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

4) Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Démontrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) $F \cap F^\perp = \{0\}$;
(ii) $q|_F$ est non-dégénérée ;
(iii) $F \oplus F^\perp = E$.

b) Vérifier cette équivalence dans les quatre cas de la question 3b ci-dessus.

Exercice 2. 1) Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. On considère F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ de F et G respectivement.

a) Déterminer des matrices A, B et C, dont on déterminera la taille, telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^{\intercal}C & B \end{pmatrix}.$$

b) Démontrer que F et G sont orthogonaux relativement à q si et seulement si $C = 0$.

2) Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$.

a) On supppose qu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de q s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & A \end{pmatrix},$$

où λ est un scalaire non nul et A une matrice carrée de taille $n-1$.

b) Démontrer par récurrence sur n que q possède une base orthogonale.

3) On suppose $n = 3$, et on se donne une base (e_1, e_2, e_3) de E. On considère la forme quadratique q donnée dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 3. 1) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbf{R}^2)$. On suppose qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$ telle que $q(e_1) > 0$ et $q(e_2) > 0$.

a) Quelles sont les signatures possibles pour q ? donner un exemple dans chaque cas.

b) Montrer que si e_1 et e_2 sont orthogonaux, alors q est définie positive.

2) a) Considérons la forme quadratique $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbf{R}$. Déterminer la signature de q, puis son cône positif, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}^+(q) := \big\{u \in \mathbf{R}^2 : q(u) > 0\big\}.$$

Faire un dessin.

b) Même question pour la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ définie dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

3) Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbf{R}^n)$ telle qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $q(e_i) > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Quelle signature la forme quadratique q peut-elle avoir ?

Exercice 4. 1) On suppose $\mathbf{k} = \mathbf{C}$. Pour chacune des formes quadratiques q suivantes, déterminer le cône isotrope

$$Z(q) := \{u \in E : q(u) = 0\}.$$

a) $q : (x, y) \in \mathbf{C}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbf{C}$;

b) $q : (x, y) \in \mathbf{C}^2 \mapsto x^2 \in \mathbf{C}$.

2) On suppose $\mathbf{k} = \mathbf{R}$. Même question que ci-dessus pour les formes quadratiques :

a) $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$;

b) $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbf{R}$;

c) $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto -x^2 - y^2 \in \mathbf{R}$;

d) $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$;

e) $q : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto -x^2 \in \mathbf{R}$.

3) Soit $q, q' \in \mathcal{Q}(E)$.

a) Montrer que si q et q' sont congruentes, alors il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $Z(q') = g(Z(q))$.

b) On suppose $E = \mathbf{C}^2$. Montrer que réciproquement, s'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $Z(q') = g(Z(q))$ alors q et q' sont congruentes.

c) L'énoncé de la question précédente reste-t-il vrai si on remplace $\mathbf{C}^2$ par $\mathbf{R}^2$?

4) Soit $a, b, c \in \mathbf{k}$ non tous nuls. On considère la forme quadratique non nulle

$$q : (x, y) \in \mathbf{k}^2 \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 \in \mathbf{k},$$

et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) On suppose $\mathbf{k} = \mathbf{C}$. Déterminer explicitement le cône isotrope de q. Déterminer le rang de q en fonction de Δ. (*Indication* : traiter à part le cas $a = 0$; remarquer que si $a \neq 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $q(x, y) = 0$ si et seulement si $y \neq 0$ et $q(x/y, 1) = 0$).

b) On suppose $\mathbf{k} = \mathbf{R}$. Déterminer explicitement le cône isotrope de q. Déterminer la signature de q en fonction de Δ et a. (*Attention* : Δ et le déterminant de q — dans n'importe quelle base — ont des signes opposés).