Théorie des déformations*

Thomas Dedieu

26 février 2006

1 Point de vue fonctoriel

1.1 Représentabilité

Soit S un schéma localement noethérien. On considère un foncteur contravariant

$$F : \mathfrak{Sch}_S \longrightarrow \mathfrak{Ens}.$$

On dit que F est représentable s'il existe un S-schéma X et un élément $\mathcal{U} \in F(X)$ tel que pour tout S-schéma Z la flèche naturelle

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(Z, X) & \longrightarrow & F(Z) \\ f & \longmapsto & f^*\mathcal{U} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exemple 1.1 (schéma de Hilbert)

Si X est un S-schéma muni d'un fibré relativement ample $\mathcal{O}(1)$, et P est un polynôme, on définit le foncteur de Hilbert

$$\begin{array}{cccc} Hilb_P(X/S) : & \mathfrak{Sch}_S & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ & Z & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-schémas } V \subset X \times_S Z, \\ \text{propres et plats sur } Z, \\ \text{de polynôme de Hilbert } P \end{array} \right\}. \end{array}$$

Si X/S est projectif, alors il existe $\mathcal{U}_P(X/S) \to H_P(X/S)$ qui représente le foncteur $Hilb_P(X/S)$; de plus, $H_P(X/S)$ est un S-schéma projectif, on l'appelle le schéma de Hilbert de X/S relativement à P.

On retrouvera la construction du schéma de Hilbert, due à Grothendieck et améliorée par Mumford, dans le livre [5]. Concrètement, ce résultat signifie que pour tout S-schéma Z, tous les sous-schémas fermés

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr] & X \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ & Z \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

*notes de l'exposé du 7 février 2006, présenté au groupe de travail sur la théorie de Hodge propres et plats sur Z, de polynôme de Hilbert P sont obtenus par changement de base

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{U}_P(X/S) \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "f"] & H_P(X/S) \end{tikzcd}$$

à partir du sous-schéma universel $\mathcal{U}_P(X/S)$ pour un certain morphisme $f : Z \to H_P(X/S)$ uniquement déterminé. Les points de $H_P(X/S)$ paramètrent les sous-schémas fermés de X/S de polynôme de Hilbert P.

Il est à noter qu'une telle situation, dans laquelle le foncteur étudié est représentable, est relativement exceptionnelle. En général, les choses sont un peu moins agréables, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

1.2 Le foncteur des déformations

Définition 1.2 *Une famille de variétés complexes est une submersion holomorphe propre $\mathcal{X} \xrightarrow{\phi} B$, où $\mathcal{X}$ et B sont deux variétés complexes.*
Si $(B, 0)$ est une variété pointée, les fibres X_t, $t \in B$, sont appelées des déformations de la fibre centrale X_0.

Soit X une variété complexe. On définit un foncteur contravariant

$$\begin{array}{cccc} Def: & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{Ens} \\ & (B,0) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'isomorphismes de} \\ \text{familles } \mathcal{X} \to B,\ X_0 \cong X \end{array} \right\}, \end{array}$$

où l'on dit que deux familles $\mathcal{X} \to B$ et $\mathcal{X}' \to B$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & \mathcal{X} \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

au dessus de B qui vaut l'identité sur la fibre centrale. De manière délibérée, on ne précise pas quelle est la catégorie $\mathfrak{C}$; on choisit celle qui correspond au problème que l'on souhaite étudier. Le plus souvent, ce sera la catégorie des germes d'espaces analytiques (ou algébriques, selon le cadre dans lequel on se place), ou celle des schémas artiniens. On rappelle qu'un anneau artinien est un anneau pour lequel toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Le prototype du schéma artinien est $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{n+1}))$, qui correspond à un point avec une direction tangente jusqu'à l'ordre n.

Notons au passage l'analogie avec l'étude des espaces de modules. Le foncteur étudié est alors celui présenté plus haut, les variétés remplaçant les variétés pointées. Il existe de nombreux exemples où ces problèmes de modules sont bien compris ; citons notamment celui des courbes ([1]) et des surfaces K3 ([6]). S'il existe une famille $\mathcal{U} \to M$ représentant le foncteur, on dit que M est un bon espace de modules, et $\mathcal{U}$ la famille universelle associée. Ce n'est le plus souvent pas le cas, même si on dispose en général d'une variété (singulière) M dont les points (fermés) correspondent aux variétés de la même famille que X. On parle alors d'espace de modules grossier ; il n'y a pas dans ce cas de famille universelle, mais à toute famille $\mathcal{X} \to B$ correspond un morphisme $B \to M$.

Lorsque le foncteur Def est représenté par une famille $\mathcal{U} \to B$, on dit que $\mathcal{U}$ est une famille universelle locale de déformations pour X. Ici encore, ce ne sera le plus souvent pas exactement le cas. Comme pour les espaces de modules, la principale obstruction à l'existence d'une famille universelle locale de déformations est l'existence d'automorphismes de la variété X. S'il en existe, et qu'en plus ils s'étendent à des isomorphismes de familles de déformations, la base de ce qui tient lieu de famille universelle locale est obtenue comme un quotient par l'action de ce groupe d'automorphismes, ce qui a l'inconvénient d'engendrer des singularités aux points fixes de ce groupe de manière un peu artificielle : alors qu'il est possible localement sur la base d'obtenir une famille qui se comporte bien, la situation globale est singulière. Le point de vue moderne consiste, comme pour les espaces de modules à s'intéresser plutôt aux champs algébriques, qui permettent d'étudier globalement la situation sans oublier ce qui se passe localement, et donc de s'affranchir de ces singularités.

1.3 Principes de Kodaira et Artin

Ces principes, établis par Kodaira dans le cadre holomorphe et par Artin dans le cadre algébrique, permettent de relever des sections formelles en de vraies sections moyennant certaines hypothèses.

Précisément, considérons une famille de variétés algébriques

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, mapsto] & \in & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ b_0 & \in & B \end{tikzcd}$$

($\mathcal{X}$ et B sont des variétés algébriques, π est un morphisme propre et plat). Si $\hat{0}$ est une section formelle de π (*i.e.* une section définie sur un voisinage formel de b_0 dans B), alors il existe un fermé de Zariski $Z \subset \mathcal{X}$ contenant 0 tel que le morphisme

$$\begin{tikzcd} 0 & \in & Z \arrow[d, "\pi"] \\ & & B \end{tikzcd}$$

est étale sur un voisinage de 0 dans Z. Dans le cadre holomorphe, $\mathcal{X}$ et B sont des espaces analytiques, π est une submersion holomorphe propre, et $\hat{0}$ est une section donnée par une série formelle, et on peut affirmer qu'il existe une section de π définie au voisinage de b_0 pour la topologie usuelle qui est osculatrice à l'ordre n.

On prendra bien garde aux hypothèses, et notamment au fait qu'on dispose dès le départ d'une famille $\mathcal{X} \to B$ où $\mathcal{X}$ et B sont des variétés algébriques (resp. analytiques). Il n'est pas question de partir d'une famille $\mathcal{X}_n \to B_n$ où B_n est un schéma formel et d'en déduire qu'il existe une famille $\mathcal{X} \to B$ (où $\mathcal{X}$ et B sont des variétés) dans laquelle la famille de départ s'insère !

2 Déformations de variétés complexes

2.1 Extensions de faisceaux quasi-cohérents

Soit X une variété complexe, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux quasi-cohérents sur X. On dit qu'un faisceau $\mathcal{H}$ sur X est une extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ s'il existe une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0.$$

En particulier, une extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ est toujours quasi-cohérente. Deux extensions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ sont isomorphes s'il existe un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{H}' \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Proposition 2.1 *Les classes d'isomorphisme d'extensions de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ sont paramétrées par le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$. Chacune de ces classes est un espace homogène sur le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$.*

Preuve : soit

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0$$

une extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$. On écrit la longue suite exacte de cohomologie associée

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \to \cdots \quad ;$$

la classe de l'extension est $\eta := \delta(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$. Elle est nulle si et seulement s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, "s"] \arrow[dr, equal] & \\ \mathcal{H} \arrow[r] & \mathcal{G}, \end{tikzcd}$$

autrement dit si et seulement s'il existe une section

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s"'] & 0, \end{tikzcd}$$

i.e. si et seulement si $\mathcal{H}$ est à isomorphisme près l'extension triviale $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.

Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont deux extensions isomorphes de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$, il est immédiat de vérifier que les deux classes d'extension correspondantes η et η' sont égales. On va maintenant montrer réciproquement que si $\eta = \eta'$, alors les deux extensions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont isomorphes. On calcule le groupe de cohomologie $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ à l'aide de la résolution de Čech ; il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ tel que dans chaque ouvert U_i, $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}|_{U_i}$ se relève en

$$s_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U_i)}(\mathcal{G}(U_i), \mathcal{H}(U_i)).$$

On a obtenu une 0-cochaîne dans $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{H}))$ On calcule sa différentielle de Čech

$$s_{ij} = s_i - s_j \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(U_{ij}), \mathcal{H}(U_{ij})).$$

Son image dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}(U_{ij}), \mathcal{G}(U_{ij}))$ est nulle par construction, donc elle provient *via* j_* de $\widetilde{s_{ij}} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(U_{ij}), \mathcal{F}(U_{ij}))$. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{G} \arrow[dl, "\widetilde{s_{ij}}"'] \arrow[d, "s_{ij}"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{H}. \end{tikzcd}$$

La différentielle de Čech de (s_{ij}) est nulle, donc celle de $(\widetilde{s_{ij}})$ aussi par injectivité. η est la classe de cohomologie associée au 1-cocyle $(\widetilde{s_{ij}})$. La classe η' se construit de manière parfaitement identique, et on peut supposer librement, quitte à considérer un recouvrement plus fin, que les deux recouvrements ouverts utilisés sont égaux.

Maintenant, l'égalité $\eta = \eta' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ signifie qu'il existe des morphismes $\tau_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(U_i),\mathcal{F}(U_i))$ tels que

$$\widetilde{s_{ij}} - \widetilde{s_{ij}}' = \tau_i - \tau_j.$$

On va construire des morphismes α_i s'insérant dans les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "j"'] \arrow[d, equal] & \mathcal{H}(U_i) \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "\alpha_i"] & \mathcal{G}(U_i) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_i"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "j'"'] & \mathcal{H}'(U_i) \arrow[r, "p'"'] & \mathcal{G}(U_i) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s'_i"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

et se recollant en un morphisme $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$. Pour tout $x \in \mathcal{H}(U_i)$, on a une décomposition

$$x = s_i(p(x)) + j(x_i)$$

où x_i est uniquement déterminé, ce qui autorise la définition

$$\alpha_i(x) := s'_i(p(x)) + j'(x_i) + j'(\tau_i(p(x)).$$

Il est immédiat que le diagramme est commutatif. Si $x \in U_{ij}$, alors x_i et x_j, relatifs aux deux décompositions

$$x = s_i(p(x)) + j(x_i) = s_j(p(x)) + j(x_j),$$

satisfont à la relation $x_j - x_i = \widetilde{s_{ij}}(p(x))$. Finalement on a donc

$$\begin{aligned}
\alpha_i(x) - \alpha_j(x) &= s'_i(p(x)) + j'(x_i) + j'(\tau_i(p(x)) - (s'_j(p(x)) + j'(x_j) + j'(\tau_j(p(x))) \\
&= s'_{ij}(p(x)) - j'(\widetilde{s_{ij}}(p(x)) + j'(\tau_i(p(x)) - \tau_j(p(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

autrement dit les α_i se recollent en un morphisme α dont il est immédiat de vérifier que c'est un isomorphisme. $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont donc bien isomorphes en tant qu'extensions de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$.

Enfin, étant donnée une classe $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G},\mathcal{F})$, représentée en cohomologie de Čech dans un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ par un 1-cocycle (s_{ij}), on définit un faisceau $\mathcal{H}$ sur X par les relations

$$\mathcal{H}(U) := \{(f_i,g_i)_{i\in I},\ f_i \in \mathcal{F}(U\cap U_i),\ g_i \in \mathcal{G}(U\cap U_i),\ f_i - f_j = s_{ij}(g_i - g_j)\} \quad ;$$

on vérifie aisément qu'il s'agit d'une extension de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$, dont la classe est η. $\square$

Si $\mathcal{F}$ est localement libre, alors on a canoniquement $\mathcal{F} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$, et le calcul du premier groupe de cohomologie donne $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^1(X,\mathcal{F})$. On obtient alors immédiatement :

Corollaire 2.2 *Si F est un fibré holomorphe sur X, $\mathcal{F}$ le faisceau de ses sections holomorphes, alors $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{F})$ paramètre les classes d'extensions de F par le fibré trivial.*

2.2 L'application de Kodaira-Spencer

On rappelle (*cf.* [2]) que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des morphismes de schémas, alors on dispose d'une suite exacte de faisceaux sur X

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Pour mémoire, si X est une variété non singulière et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}$, alors la lissité de Y impose que Ω_Y est localement libre. Si Y est un schéma localement intersection complète (*i.e.* si $\mathcal{I}$ est localement engendré par $r := \mathrm{codim}(Y, X)$ éléments), alors $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un faisceau localement libre de rang r.

Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ une famille de variétés complexes. On suppose connaître $0 \in B$, et on note $X = \phi^{-1}(0)$. On a une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\mathcal{X}$

$$0 \to \phi^*\Omega_B \to \Omega_{\mathcal{X}} \to \Omega_{\mathcal{X}/B} \to 0.$$

Après restriction à X, la suite exacte duale s'écrit

$$0 \to T_X \to T_{\mathcal{X}}|_X \to T_{B,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_X \to 0,$$

où T_X est le fibré tangent holomorphe de X, et la dernière flèche est donnée par la différentielle ϕ_*. Cette suite exacte fournit une extension de T_X par le fibré trivial de fibre $T_{B,0}$, caractérisée d'après 2.1 par la flèche de cobord

$$\rho : T_{B,0} = \mathrm{H}^0(X, T_{B,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^1(X, T_X).$$

Définition 2.3 *L'application $\rho : T_{B,0} \to \mathrm{H}^1(X, T_X)$ est l'application de Kodaira-Spencer en* 0 *de la famille $\mathcal{X} \to B$.*

Proposition 2.4 *L'application de Kodaira-Spencer est l'application classifiante pour la déformation du premier ordre de X induite par la déformation $\mathcal{X}$.*

Preuve : la déformation du premier ordre de X induite par $\mathcal{X}$ est le sous-schéma $X_\varepsilon := \phi^{-1}(B_\varepsilon) \subset \mathcal{X}$, où $B_\varepsilon = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_B/\mathfrak{m}_0^2)$ et $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal maximal correspondant au point $0 \in B$. X_ε et X sont égaux en tant qu'espaces topologiques mais ils n'ont pas le même anneau de fonctions.

Il suffit de prouver le résultat dans le cas où $\dim B = 1$, auquel cas l'anneau de fonctions sur B_ε est simplement $\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Par le théorème d'inversion locale holomorphe la famille $\mathcal{X} \to B$ est isomorphe à un produit localement le long de X ; autrement dit il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ de X tel que pour tout i il existe un ouvert $V_i \subset \mathcal{X}$ avec $V_i \cap X = U_i$ et un isomorphisme holomorphe compatible à ϕ

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi"'] & U_i \times B_i \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ B_i & \end{tikzcd}$$

égal à Id sur U_i, B_i étant un voisinage ouvert de 0 dans B. La donnée de toutes ces trivialisations fournit des isomorphismes

$$\theta_i : \mathcal{O}_{X_\varepsilon}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$$

qui décrivent intrinsèquement les sous-schémas $V_i \cap X_\varepsilon$. Sur les ouverts $V_i \cap V_j$ les changements de trivialisations fournissent des automorphismes de faisceaux d'anneaux sur $U_i \cap U_j$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{X_\varepsilon}|_{U_{ij}} \arrow[dl, "\theta_j"'] \arrow[dr, "\theta_i"] & \\ \mathcal{O}_{U_{ij}}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \arrow[rr, "\theta_{ij}=\theta_i\circ\theta_j^{-1}"'] & & \mathcal{O}_{U_{ij}}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \end{tikzcd}$$

qui valent l'identité sur $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ et préservent la fonction ε, car les trivialisations sont compatibles à ϕ et valent Id sur U_{ij}. Un tel automorphisme θ_{ij} est donc uniquement déterminé par une dérivation χ_{ij} de l'anneau $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ *via* la relation

$$\theta_{ij}(f) = f + \varepsilon\chi_{ij}(f),$$

valable pour toute fonction f de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$. Cela s'interprète assez clairement d'un point de vue géométrique : il faut voir les fonctions de $\mathcal{O}_{X_\varepsilon}$ comme des développements de Taylor au premier ordre de fonctions de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ (*i.e.* des séries entières en ε tronquées à l'ordre 1). Les expressions d'une telle fonction dans les différentes trivialisations ne diffèrent qu'à l'ordre exactement 1 (car les trivialisations valent l'identité sur les U_i), et ε est toujours la même fonction (car les trivialisations sont compatibles avec ϕ). La dérivation χ_{ij} mesure précisément cette différence au niveau des premières dérivées. Dans la relation

$$\theta_{ij}(f_0 + \varepsilon f_1) = f_0 + \varepsilon(\chi_{ij}(f_0) + f_1) + \varepsilon^2\chi_{ij}(f_1) = f_0 + \varepsilon(\chi_{ij}(f_0) + f_1),$$

le terme en $\chi_{ij}(f_1)$ disparaît, car une différence à l'ordre 1 pour f_1 induit une différence à l'ordre 2 pour $f = f_0 + \varepsilon f_1$, ce qui ne se voit pas dans le faisceau de fonctions $\mathcal{O}_{X_\varepsilon}$.

Maintenant, une dérivation χ_{ij} de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ est précisément un champ de vecteurs holomorphe sur U_{ij}. Comme d'autre part la relation de cocycles $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} \circ \theta_{ki} = \mathrm{Id}$ pour les changements de trivialisation induit la relation $\chi_{ij} + \chi_{jk} + \chi_{ki} = 0$, on voit que la déformation du premier ordre X_ε trivialisée dans les ouverts U_{ij} est exactement la donnée d'un 1-cocyle de Čech (χ_{ij}) à valeurs dans le fibré tangent holomorphe T_X et relatif au recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$. Si on modifie les trivialisations θ_i en $\theta'_i = \theta_i \circ \mu_i$, les μ_i sont des automorphismes de $\mathcal{O}_{U_i}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ qui préservent ε et valent l'identité sur $\mathcal{O}_{U_i}$; ils sont donc donnés respectivement par des dérivations χ_i de $\mathcal{O}_{U_i}$, et on a $\chi'_{ij} = \chi_{ij} + \chi_i - \chi_j$. La déformation X_ε est donc caractérisée par la classe de cohomologie du cocyle (χ_{ij}) ; prenant la limite sur tous les recouvrements ouverts, on obtient que les déformations du premier ordre de X paramétrées par B_ε sont exactement paramétrées par le groupe $\mathrm{H}^1(X, T_X)$.

Il reste alors à prouver que l'application que l'on vient de construire, qui à une déformation $\mathcal{X} \to B$, $\dim B = 1$, associe la classe $\alpha \in \mathrm{H}^1(X, T_X)$ relative à la déformation du premier ordre de X induite par $\mathcal{X}$ n'est autre que l'application de Kodaira-Spencer, appliquée au vecteur $\partial/\partial\varepsilon$ tangent à B en 0. Commençons par noter que les deux suites exactes

$$0 \to T_X \to T_{\mathcal{X}}|_X \to T_{B,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_X \to 0$$

et

$$0 \to T_X \to T_{X_\varepsilon}|_X \to T_{B_\varepsilon,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_X \to 0$$

sont identiques, donc l'application de Kodaira-Spencer $\rho : T_{B_\varepsilon,0} \to \mathrm{H}^1(X, T_X)$ est entièrement déterminée par la donnée du schéma X_ε. Comme dans la preuve de 2.1, on dispose de scindages locaux sur chacun des U_i respectivement

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_X \arrow[r, "j_*"] & T_{X_\varepsilon}|_X \arrow[r, "\phi_*"] & T_{B_\varepsilon,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_X \arrow[l, bend left, "\chi_i := \theta_i^* \frac{\partial}{\partial\varepsilon}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

fournis par les trivialisations locales de $\mathcal{X}$, et où χ_i s'identifie à la dérivation $\partial/\partial\varepsilon \circ \theta_i$. On a des diagrammes

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_0 + \varepsilon f_1 \arrow[rr] & & f_0 + \varepsilon f'_1, \end{tikzcd}$$

où $f_0 = f|_X$ et $f_1' = f_1 + \chi_{ij}(f_0)$. Autrement dit

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\theta_{i*}f) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\theta_{j*}f) + \chi_{ij}(f_0),$$

et $j_*\chi_{ij} = \chi_i - \chi_j$ sur U_{ij}. On en conclut par le même calcul que dans la preuve de 2.1 que $\rho(\partial/\partial\varepsilon)$ est représenté par le 1-cocycle de Čech (χ_{ij}) à valeurs dans T_X. $\square$

La preuve donnée ici respecte tout-à-fait le point de vue de Kodaira et Spencer tel qu'il est exposé dans [4].

2.3 Obstructions : le point de vue de Ran

Soit X une variété complexe. On a vu au paragraphe précédent que les déformations au premier ordre de X sont exactement paramétrées par le groupe $\mathrm{H}^1(X, T_X)$. On se pose à présent la question suivante : à quelle condition une déformation du premier ordre de X s'étend-elle en une déformation du second ordre ? La réponse est donnée par la proposition plus générale suivante.

Proposition 2.5 *L'obstruction à étendre une déformation à l'ordre n de X est une classe dans $\mathrm{H}^2(X, T_X)$.*

Preuve : on peut se limiter à étudier le cas d'une base de dimension 1. On note $B_n = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{n+1}))$. Comme précédemment, une déformation $\phi_n : X_n \to B_n$ de X à l'ordre n est uniquement déterminée par la donnée du fibré holomorphe $T_{X_n}|_{X_{n-1}}$, où $X_{n-1} := \phi_n^{-1}(B_{n-1})$, B_{n-1} étant vu comme un sous-schéma fermé de B_n. Une telle déformation est donc caractérisée par la classe d'extension $\eta \in \mathrm{H}^1(X, T_{X_{n-1}/B_{n-1}})$ relative à la suite exacte

$$0 \to T_{X_{n-1}/B_{n-1}} \to T_{X_n}|_{X_{n-1}} \to \phi_n^*\left(T_{B_n}|_{B_{n-1}}\right) \to 0,$$

obtenue en restreignant à X_{n-1} la suite exacte

$$0 \to T_{X_n/B_n} \to T_{X_n} \to \phi_n^* T_{B_n} \to 0.$$

Comme le noyau du morphisme de restriction $T_{X_n/B_n} \to T_{X_{n-1}/B_{n-1}}$ est isomorphe à T_X, on a une suite exacte

$$0 \to T_X \to T_{X_n/B_n} \to T_{X_{n-1}/B_{n-1}} \to 0 \ ;$$

la suite exacte longue associée fournit une flèche de cobord

$$\delta : \mathrm{H}^1(X, T_{X_{n-1}/B_{n-1}}) \to \mathrm{H}^2(X, T_X).$$

L'obstruction à étendre ϕ_n en $\phi_{n+1} : X_{n+1} \to B_{n+1}$ est la classe $\delta(\eta) \in \mathrm{H}^2(X, T_X)$. En effet, celle-ci est nulle si et seulement si $\eta \in \mathrm{H}^1(X, T_{X_{n-1}/B_{n-1}})$ provient par restriction de $\eta' \in \mathrm{H}^1(X, T_{X_n/B_n})$, ou encore d'après 2.1 si et seulement si l'extension

$$0 \to T_{X_{n-1}/B_{n-1}} \to T_{X_n}|_{X_{n-1}} \to \phi_n^*\left(T_{B_n}|_{B_{n-1}}\right) \to 0$$

provient par restriction d'une extension

$$0 \to T_{X_n/B_n} \to T_{X_{n+1}}|_{X_n} \to \phi_n^*\left(T_{B_{n+1}}|_{B_n}\right) \to 0.$$

$\square$

3 Déformations de structures complexes

3.1 Crochet de Lie

La référence pour tout ce paragraphe est le livre [3]. Soit M une variété différentiable. Il existe un isomorphisme entre l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ de M et les dérivations de classe C^∞ de l'algèbre de fonctions $C^\infty(M)$.

Définition 3.1 *Le crochet de Lie $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs X et Y sur M est le champ de vecteurs associé à la dérivation $X \circ Y - Y \circ X$.*

Dans des coordonnées locales x_i sur M, un simple calcul permet d'obtenir l'expression

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \sum_i (X(Y_i) - Y(X_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On en déduit immédiatement que si f et g sont deux fonctions différentiables alors

$$[fX, gY] = fg \cdot [X, Y] + fX(g) \cdot Y - gY(f) \cdot X.$$

Citons aussi l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Définition 3.2 *La dérivée de Lie de Y par rapport à X est le champ de vecteurs*

$$L_X Y := \left.\frac{d}{dt} X_t^* Y\right|_{t=0},$$

où X_t désigne la famille à un paramètre de difféomoprhismes induite par X. De manière analogue, si ω est une forme différentielle sur X, on pose

$$L_X \omega := \left.\frac{d}{dt} X_t^* \omega\right|_{t=0}.$$

De manière générale, si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme et ω une p-forme différentielle sur N, $\phi^*\omega$ est la p-forme différentielle sur M définie par

$$(\phi^*\omega)_m(v_1, \ldots, v_p) := \omega_{\phi(m)}(\phi_* v_1, \ldots, \phi_* v_p),$$

où $m \in M$, $v_1, \ldots, v_p \in TM_m$, et ϕ_* est la différentielle de ϕ. Si X est un champ de vecteurs sur N, le champ de vecteurs $\phi^* X$ est défini par

$$(\phi^* X)(m) := (\phi_*)^{-1} X(\phi(m)).$$

Reprenant les notations de la définition 3.2, on peut donner une définition plus explicite pour la dérivée de Lie de Y par rapport à X :

$$(L_X Y)(m) = \lim_{t \to 0} \frac{dX_{-t}(Y(X_t(m))) - Y(m)}{t}.$$

Proposition 3.3 *Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur M.*

(a) $L_X f = X(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.
(b) $L_X Y = [X, Y]$ pour tout champ de vecteurs Y.
(c) $L_X : \Lambda^*(TM) \to \Lambda^*(TM)$ est une dérivation ; elle commute avec d.

(d) Sur $\Lambda^*(TM)$, on a $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$.

(*cf.* [10] p.70 pour une preuve). Le dernier point est connu sous le nom de formule de Cartan-Lie.

On voudrait maintenant définir un crochet de Lie pour les formes différentielles sur M à valeurs dans les champs de vecteurs *i.e.* pour les sections des $\Omega^p_M \otimes T_M$. En utilisant la dérivée de Lie, on peut reformuler l'un des résultats précédents en

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fL_X g \cdot Y - gL_Y f \cdot X.$$

S'inspirant de cette formule de Leibnitz, on définit pour $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p_M$, $v_1, v_2 \in TM$

$$[\omega_1 \otimes v_1, \omega_2 \otimes v_2] := \omega_1 \wedge \omega_2 \otimes [v_1, v_2] + \omega_1 \wedge L_{v_1}\omega_2 \otimes v_2 - L_{v_2}\omega_1 \wedge \omega_2 \otimes v_1,$$

et on étend cette formule par linéarité à n'importe quelle section de $\Omega^p_M \otimes TM$. Dans le cas qui nous intéresse pour l'étude des déformations, on a le résultat suivant :

Lemme 3.4 *Soit X une variété complexe, α et β deux sections C^∞ de $\Omega^{0,1}_X \otimes T^{1,0}_X$. Alors $[\alpha, \beta] \in \Omega^{0,2}_X \otimes T^{1,0}_X$, et dans un système de coordonnées holomorphes locales on a*

$$[\alpha,\beta]\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), \beta\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right] + \left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right].$$

Preuve : on écrit

$$\alpha = \sum_{k_1,l_1} \alpha_{k_1 l_1} d\bar{z}_{k_1} \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_1}} \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{k_2,l_2} \beta_{k_2 l_2} d\bar{z}_{k_2} \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_2}}.$$

La formule de Leibnitz donne alors

$$[\alpha,\beta] = \sum_{l_1,l_2} \left[\left(\sum_{k_1} \alpha_{k_1 l_1} d\bar{z}_{k_1}\right) \wedge L_{\partial/\partial z_{l_1}} \left(\sum_{k_2} \beta_{k_2 l_2} d\bar{z}_{k_2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_2}} \right.$$
$$\left. - L_{\partial/\partial z_{l_2}} \left(\sum_{k_1} \alpha_{k_1 l_1} d\bar{z}_{k_1}\right) \wedge \left(\sum_{k_2} \beta_{k_2 l_2} d\bar{z}_{k_2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_1}} \right],$$

et on a d'après la formule de Cartan-Lie

$$L_{\partial/\partial z_{l_2}} \left(\sum_{k_1} \alpha_{k_1 l_1} d\bar{z}_{k_1}\right) = \left(\sum_{k_1} \frac{\partial \alpha_{k_1 l_1}}{\partial z_{l_2}} d\bar{z}_{k_1}\right)$$

et

$$L_{\partial/\partial z_{l_1}} \left(\sum_{k_2} \beta_{k_2 l_2} d\bar{z}_{k_2}\right) = \left(\sum_{k_2} \frac{\partial \beta_{k_2 l_2}}{\partial z_{l_1}} d\bar{z}_{k_2}\right).$$

On en déduit

$$[\alpha,\beta] = \sum_{l_1,l_2} \left[\left(\sum_{k_1} \alpha_{k_1 l_1} d\bar{z}_{k_1}\right) \wedge \left(\sum_{k_2} \frac{\partial \beta_{k_2 l_2}}{\partial z_{l_1}} d\bar{z}_{k_2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_2}} \right.$$
$$\left. - \left(\sum_{k_1} \frac{\partial \alpha_{k_1 l_1}}{\partial z_{l_2}} d\bar{z}_{k_1}\right) \wedge \left(\sum_{k_2} \beta_{k_2 l_2} d\bar{z}_{k_2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_{l_1}} \right],$$

et donc

$$[\alpha,\beta]\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i},\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)=\sum_k\left(\sum_{l_1}\alpha_{il_1}\frac{\partial\beta_{jk}}{\partial z_{l_1}}-\sum_{l_1}\alpha_{jl_1}\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial z_{l_1}}-\sum_{l_2}\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial z_{l_2}}\beta_{jl_2}+\sum_{l_2}\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial z_{l_2}}\beta_{il_2}\right)\frac{\partial}{\partial z_k}.$$

On a enfin

$$\begin{aligned}\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right] &= \left[\sum_{l_1}\alpha_{il_1}\frac{\partial}{\partial z_{l_1}},\sum_{l_2}\beta_{jl_2}\frac{\partial}{\partial z_{l_2}}\right]\\ &= \sum_k\left(\sum_{l_1}\alpha_{il_1}\frac{\partial\beta_{jk}}{\partial z_{l_1}}-\sum_{l_2}\beta_{jl_2}\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial z_{l_2}}\right)\frac{\partial}{\partial z_k},\end{aligned}$$

qui combinée à l'expression analogue pour $[\beta(\partial/\partial\bar z_i),\alpha(\partial/\partial\bar z_j)]$ permet de retrouver précisément $[\alpha,\beta](\partial/\partial\bar z_i,\partial/\partial\bar z_j)$. $\square$

Lemme 3.5 *Soit $\alpha,\beta\in\Omega_X^{0,1}\otimes T_X^{1,0}$. Dans un système de coordonnées holomorphes locales on a*

$$\begin{aligned}\bar\partial[\alpha,\beta]\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i},\frac{\partial}{\partial\bar z_j},\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\right) &= \left[\bar\partial\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i},\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]+\left[\bar\partial\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j},\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]\\ &+ \left[\bar\partial\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_k},\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]+\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\bar\partial\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_k},\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\\ &+ \left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\bar\partial\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j},\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]+\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\bar\partial\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i},\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right].\end{aligned}$$

Preuve : on rappelle qu'en général si $\omega\in\Omega_X^{0,1}$ on a

$$\bar\partial\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)=\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right),$$

et si $\omega\in\Omega_X^{0,2}$ on a

$$\bar\partial\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)=\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\bar z_j}\left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right).$$

En utilisant 3.4, on obtient donc

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}[\alpha,\beta]\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i},\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j},\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right) = \\
&\quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right]+\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right]\right)\\
&+\quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left(\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right]+\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right]\right)\\
&+\quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right]+\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right]\right)\\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right]+\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right]\\
&\qquad\qquad +\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right)\right]\\
&\quad +\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right]+\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right)\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right]\\
&\qquad\qquad +\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right)\right]\\
&\quad +\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right),\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right]+\left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right)\right]+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\right),\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right]\\
&\qquad\qquad +\left[\beta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right),\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)\right)\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne l'expression annoncée en regroupant ces douze termes par paires convenables puis en utilisant la formule donnant $\bar{\partial}\omega$ en coordonnées locales pour $\omega \in \Omega_X^{0,1}$. □

3.2 Utilisation de théorèmes de trivialisation

On va énoncer des résultats de trivialisations (pour les preuves desquels on renvoie à [9]) qui permettent d'interpréter une déformation $\mathcal{X} \to (B, 0)$ d'une variété X comme une famille de structures complexes sur la variété différentiable sous-jacente à X.

Proposition 3.6 (Ehresmann) *Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ une submersion propre entre deux variétés différentiables. On suppose B contractile et munie d'un point de base 0. Alors il existe un difféomorphisme $T : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "\sim", "T"'] \arrow[d, "\phi"'] & X_0 \times B . \arrow[dl, "pr_2"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

La donnée d'une telle trivialisation équivaut donc à la donnée de sa première composante $\pi : \mathcal{X} \to X_0$, qui doit induire pour chaque t un difféomorphisme $X_t \cong X_0$. En particulier, toutes les fibres sont difféomorphes entre elles. Dans le cas complexe, une telle trivialisation de classe C^∞ permet de voir la structure complexe sur X_t comme une structure complexe sur X_0 *via* le difféomorphisme $\pi_t : X_t \to X_0$. Une famille de variétés complexes peut donc être conçue comme une famille de structures complexes sur une variété différentiable sous-jacente fixe.

Dans le cas complexe, on a un résultat plus précis, qui permet de supposer que l'application qui à $t \in B$ associe la structure complexe de $X_t \cong X_0$ est holomorphe en t.

Proposition 3.7 *Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ une famille de variétés complexes, 0 un point de B. Alors quitte à remplacer B par un voisinage de 0, il existe une trivialisation $(\pi, \phi) : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$ de classe C^∞ telle que les fibres de π sont des sous-variétés complexes de $\mathcal{X}$.*

Soit $\mathcal{X} \to B$ une déformation d'une variété complexe X. On considère une trivialisation locale $T = (\pi, \phi) : \mathcal{X} \cong X \times B$ comme dans la proposition 3.7. On peut supposer que $\pi_0 = \mathrm{Id}_X$. Pour tout $t \in B$, on note $\pi_t : X_t \cong X$ le difféomorphisme fourni par π. Pour chaque $x \in X$, on dispose d'une famille $t \mapsto I_t$ de structures complexes sur $T_{X,x}$, I_t étant induite *via* $(\pi_t)_*$ par la structure complexe sur T_{X_t,x_t}. Chacune de ces structures complexes est équivalente à la donnée de la décomposition $T_{X,x,\mathbf{C}} = (T^{1,0}_{X,x})_t \oplus (T^{0,1}_{X,x})_t$, où encore à la donnée du sous-espace complexe $(T^{0,1}_{X,x})_t \subset T_{X,x,\mathbf{C}}$. Pour t proche de 0, ce sous-espace complexe s'écrit comme le graphe de l'application

$$-\alpha_t : T^{0,1}_{X,x} \xrightarrow{\sim} (T^{0,1}_{X,x})_t \longrightarrow T^{1,0}_{X,x}$$

où la première flèche est l'inverse de la projection $(T^{0,1}_{X,x})_t \to T^{0,1}_{X,x}$, et la seconde flèche la projection $(T^{0,1}_{X,x})_t \to T^{1,0}_{X,x}$. On considère α_t comme une famille de sections dans $A^{0,1}(T_X)$ *via* l'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(T^{0,1}_X, T^{1,0}_X) \cong \Omega^{0,1}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} T^{1,0}_X$.

Inversement, une telle forme α_t détermine une famille de structures complexes sur $T_{X,x}$: les vecteurs de type $(0,1)$ pour $I_{t,x}$ sont les vecteurs de la forme $u - \alpha_t(u)$ pour u vecteur de type $(0,1)$ pour $I_{0,x}$. La forme α_t ainsi construite s'annule clairement en $t = 0$ et est holomorphe en t sous les hypothèses faites sur la trivialisation T.

On a alors le résultat suivant, analogue à la proposition 2.4, et qui permet d'interpréter d'un autre point de vue l'application de Kodaira-Spencer comme l'application classifiante des déformations au premier ordre de la structure complexe de X induites par $\mathcal{X}$.

Proposition 3.8 *L'application $T_{B,0} \to A^{0,1}(T_X)$ donnée par $u \mapsto d_u(\alpha_t)$ (*i.e.* la différentielle de $t \mapsto \alpha_t$) est à valeurs dans l'ensemble des sections $\bar\partial$-fermées de $\mathcal{A}^{0,1}(T_X)$. Pour tout $u \in T_{B,0}$, la classe de cohomologie de Dolbeault de $d_u(\alpha_t)$ dans $\mathrm{H}^1(X, T_X)$ est égale à $\rho(u)$.*

Preuve : comme chaque sous-variété $T^{-1}(x \times B)$, *a priori* seulement différentiable est en fait une sous-variété complexe de $\mathcal{X}$ par 3.7, $T_*^{-1}(T_B)$ est un sous-fibré complexe de classe C^∞ du fibré tangent holomorphe $T_{\mathcal{X}}$, isomorphe *via* ϕ_* à $\phi^*(T_B)$; on dispose donc d'un scindage C^∞

$$\sigma : \phi^* T_B \to T_{\mathcal{X}}$$

qui fournit par restriction à X un scindage de la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_X \arrow[r] & T_{\mathcal{X}}|_X \arrow[r] & \phi^* T_B|_X \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Le calcul explicite de la flèche de cobord associée montre alors que l'application de Kodaira-Spencer est décrite en cohomologie de Dolbeault par la relation

$$\rho(u) = \bar\partial\sigma(u)$$

pour tout $u \in T_{B,0}$.

Il s'agit donc de voir $\bar\partial\sigma(u) = d_u(\alpha_t) \in A^{0,1}(T_X)$ pour tout $u \in T_{B,0}$. On se donne des coordonnées holomorphes locales $t_1, \ldots, t_r$ centrées en 0 sur B, et des fonctions holomorphes $z_1, \ldots, z_n$ sur $\mathcal{X}$ telles que $z_1, \ldots, z_n, \phi^* t_1, \ldots, \phi^* t_r$ soit un système de coordonnées holomorphes locales sur $\mathcal{X}$. Dans ces coordonnées, ϕ est donnée par

$$\phi(z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_r) = (t_1, \ldots, t_r)$$

et $\pi : \mathcal{X} \to X$ par un n-uplet de fonctions différentiables holomorphes en les t_i

$$\pi(z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_r) = (\pi_1(z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_r), \ldots, \pi_n(z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_r)).$$

Par définition les champs de vecteurs de type $(0,1)$ pour I_t sont engendrés en $\pi(z,t)$ par les

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)=\sum_j\frac{\partial\pi_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_j}+\sum_j\frac{\partial\bar{\pi}_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j},$$

donc

$$\alpha_t\left(\sum_j\frac{\partial\bar{\pi}_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\right)=-\sum_j\frac{\partial\pi_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

au point $\pi(z,t)$. On sait que $\pi(z,0)=z$, donc à l'ordre 0 en t

$$\sum_j\frac{\partial\bar{\pi}_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}$$

au point $(z,0)$, et comme $\alpha_0=0$ on obtient la relation en $(z,0)$ au premier ordre en t

$$\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)=-\sum_j\frac{\partial\pi_j}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

En dérivant par rapport à t_k, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\alpha_t)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\bigg|_{t=0}=-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\sum_j\frac{\partial\pi_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}\right).$$

D'autre part, $\sigma(\partial/\partial t_k)$ est l'unique champ de vecteurs de type $(1,0)$ qui est à la fois annulé par π_* et envoyé sur $\partial/\partial t_k$ par ϕ_*. Or le long de X, on a $\pi_*(\partial/\partial z_j)=\partial/\partial z_j$, $\pi_*(\partial/\partial t_k)=\sum(\partial\pi_j/\partial t_k)\partial/\partial z_j$ (tous les $\partial\bar{\pi}_j/\partial t_k$ sont nuls car α_t est holomorphe en t), et bien sûr $\phi_*(\partial/\partial z_j)=0$. On en déduit donc l'écriture en coordonnées locales le long de X

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)=\frac{\partial}{\partial t_k}-\sum_j\frac{\partial\pi_j}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

On a donc finalement

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\alpha_t)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)\bigg|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\left(\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right)$$

en $(z,0)$, ce qui s'écrit encore

$$d_{\partial/\partial t_k}(\alpha_t)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right)=\left(\bar{\partial}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\right).$$

□

3.3 Déformations de Kuranishi

Soit X une variété complexe. On a vu au paragraphe précédent qu'une déformation $\mathcal{X}\to B$ s'interprète comme une déformation de structures complexes sur la variété différentiable sous-jacente à X, et que celle-ci est donnée par par une famille α_t holomorphe en $t\in B$ de sections C^∞ du fibré $\Omega_X^{0,1}\otimes T_X^{1,0}$. On s'intéresse ici comme au paragraphe 2.3 aux conditions sous lesquelles une déformation de structures complexes d'ordre n s'étend en une déformation d'ordre $n+1$. Autrement dit, on se donne un développement de Taylor à l'ordre n en t pour la famille α_t, et on cherche à l'étendre en un développement de Taylor à l'ordre $n+1$. On va en fait donner une nouvelle démonstration de la proposition 2.5, en adoptant le point de vue des déformations de structures complexes plutôt que celui des déformations de variétés complexes. On utilisera de façon essentielle le résultat suivant (*cf.* [9]) :

Théorème 3.9 (Newlander-Nirenberg) *Soit (X, I) une variété presque complexe. La structure presque complexe I provient d'une structure complexe sur la variété différentiable X (on dit alors que I est intégrable) si et seulement si*

$$\left[T_X^{0,1}, T_X^{0,1}\right] \subset T_X^{0,1}.$$

On conserve les notations introduites au paragraphe précédent. α_t définit *a priori* seulement une famille I_t de structures presques complexes (données par les décompositions $T_{X,\mathbf{C}} = (T_X^{1,0})_t \oplus (T_X^{0,1})_t$). I_t est intégrable si et seulement si

$$\left[(T_X^{0,1})_t, (T_X^{0,1})_t\right] \subset (T_X^{0,1})_t.$$

Les champs de vecteurs de type $(0,1)$ pour I_t étant les $u - \alpha_t(u)$ pour $u \in T_X^{0,1}$, la condition d'intégrabilité se réduit par linéarité à

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} - \alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right] \in (T_X^{0,1})_t$$

pour tous i et j. Or on a

- $\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}, -\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right) \in T_X^{1,0}$
- $\left[-\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right] = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)\right) \in T_X^{1,0}$
- $\left[-\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), -\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right] \in T_X^{1,0}$ par intégrabilité de I_0.

Donc I_t est intégrable si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\left(\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)\right) = \left[\alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right), \alpha_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right]$$

i.e.

$$\bar{\partial}\alpha_t = \frac{1}{2}[\alpha_t, \alpha_t]$$

en tenant compte de 3.4.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'obstruction à étendre une déformation de structures complexes à l'ordre n en une déformation à l'ordre $n+1$. Précisément, on suppose connaître

$$\alpha_t^n = t\alpha_1 + \cdots t^n \alpha_n$$

correspondant à une déformation à l'ordre n ; α_t^n est solution de l'équation d'intégrabilité à l'ordre n. On cherche alors α_{n+1} telle que $\alpha_t^{n+1} := \alpha_t^n + \alpha_{n+1}t^{n+1}$ satisfasse à la condition d'intégrabilité à l'ordre $n+1$, ce qui s'écrit simplement

$$\bar{\partial}\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{i \leqslant n}[\alpha_i, \alpha_{n+1-i}].$$

Lemme 3.10 *$\sum_{i\leqslant n}[\alpha_i,\alpha_{n+1-i}]$ est une section $\bar\partial$-fermée de $\Omega_X^{0,2}\otimes T_X^{1,0}$.*

La déformation de structures complexes α_t^n d'ordre n s'étend en une déformation d'ordre $n+1$ si et seulement si cette section $\bar\partial$-fermée est $\bar\partial$-exacte Autrement dit, l'obstruction est la classe de cohomologie de Dolbeault de cette section $\bar\partial$-fermée dans $\mathrm{H}^2(X,T_X)$.

Preuve du lemme 3.10 : on se donne des coordonnées holomorphes locales z_i. D'après 3.5 on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{p+q=n+1}\bar\partial[\alpha_p,\alpha_q]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\\
&=\sum_{p+q=n+1}\Big(\left[\bar\partial\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]+\left[\bar\partial\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]\\
&\qquad+\left[\bar\partial\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]+\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\bar\partial\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\\
&\qquad+\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\bar\partial\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]+\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\bar\partial\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]\Big)\\
&=\sum_{p+q=n+1}\sum_{l+r=p}\Big(\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]+\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]\\
&\qquad+\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\Big)+\sum_{l'+r'=q}\Big(\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),[\alpha_{l'},\alpha_{r'}]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\\
&\qquad+\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),[\alpha_{l'},\alpha_{r'}]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]+\left[\alpha_p\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),[\alpha_{l'},\alpha_{r'}]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]\Big)\\
&=\sum_{q+l+r=n+1}\Big(\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]+\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]\\
&\qquad+\left[[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]+\left[\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\\
&\qquad+\left[\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]+\left[\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),[\alpha_l,\alpha_r]\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i},\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]\Big)
\end{aligned}$$

Chacun de ces termes se développe en une somme de deux crochets d'après 3.4. On regroupe tous les termes trois par trois, chaque groupe correspondant aux trois permutations circulaires d'un triplet (q,l,r) (autrement dit on regroupe les termes correspondant aux trois écritures $q+l+r=l+r+q=r+q+l=n+1$), de manière à obtenir des sommes du type

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\left[\alpha_l\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\alpha_r\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right)\right]\right]+\left[\alpha_l\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right),\left[\alpha_r\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)\right]\right]&\\
+\left[\alpha_r\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_j}\right),\left[\alpha_q\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_i}\right),\alpha_l\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar z_k}\right)\right]\right],&
\end{aligned}$$

qui sont toutes nulles d'après l'identité de Jacobi. □

Références

[1] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. IHES*, (36) :75–110, 1969.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Number 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[3] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry, Volume I.* Number 15 in Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience publishers, 1963.

[4] Kunihiko Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures.* Number 283 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1986.

[5] Janos Kollár. *Rational curves on algebraic varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1996.

[6] Séminaire Palaiseau. *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes.* Number 126 in Astérisque. Société mathématique de France, 1985.

[7] Z. Ran. Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle. *J. Alg. Geom.*, (2) :279–291, 1992.

[8] Claire Voisin. *Symétrie miroir.* Number 2 in Panoramas et synthèses. Société Mathématique de France, 1996. Chap. I.

[9] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Number 10 in Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.

[10] Franck W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Number 94 in Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1983.