Les courbes rationnelles dans la classe primitive d'une K3 sont nodales

Thomas Dedieu

4 août 2005

Table des matières

Introduction

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, le corps de base est $\mathbf{C}$.

Définition 0.1 *Une surface K3 est une surface lisse X, à fibré canonique trivial et irrégularité nulle ; autrement dit, on impose les deux conditions suivantes :*
(i) $K_X = 0$ *;* $\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$
(ii) $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

Une surface K3 est kählerienne (on trouvera une preuve de cela dans [12]). La formule de Noether permet de calculer les nombres de Hodge d'une surface K3 (*cf.* [2]) :

$$\begin{aligned}&h^{0,1}(X) = h^{1,0}(X) = 0\\&h^{0,2}(X) = h^{2,0}(X) = 1\\&h^{1,1}(X) = 20\end{aligned}$$

On déduit alors du théorème de l'indice de Hodge que la signature de la forme d'intersection sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{R})$ est $(3, 19)$.

Une surface K3 algébrique est projective, et le groupe de Picard d'une surface K3 algébrique générique est isomorphe à $\mathbf{Z}$. La classe primitive d'une telle surface est par définition la classe du générateur positif du groupe de Picard. Le principal résultat présenté ici est le suivant :

Théorème 0.2 *Toutes les courbes rationnelles dans la classe primitive d'une surface K3 algébrique de genre $g \geqslant 2$ générique sont nodales.*

La preuve, due à Xi Chen (*cf.* [4]) s'appuie essentiellement sur un argument de dégénérescence : on fait dégénérer une surface K3 algébrique générique vers une surface K3 particulière, introduite par Bryan et Leung, et que l'on peut réaliser comme une fibration elliptique de $\mathbf{P}^1$.

On aura donc besoin de connaître quelques éléments de théorie des déformations. On prouve notamment un théorème de Torelli local pour les surfaces K3 : la famille universelle locale des déformations d'une surface K3 est lisse, et l'application des périodes associée à cette famille est un isomorphisme local. On utilise ce résultat pour prouver au passage que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes, et simplement connexes.

On prouve également un théorème de Torelli global : si X et X' sont deux surfaces K3, une isométrie de Hodge effective $\phi : \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbf{Z})$ induit un unique isomorphisme $u : X' \cong X$ tel que $\phi = u^*$. On utilise ce résultat pour démontrer que toute surface K3 (algébrique ou non) s'obtient comme une déformation d'une quartique de $\mathbf{P}^3$.

Le théorème de réduction stable et ses variantes sont des outils précieux pour plusieurs preuves données ici. On présente donc les courbes stables et leurs espaces de modules, les $\overline{M}_g$ introduits par Deligne et Mumford, qui compactifient les espaces de modules M_g des courbes projectives non singulières et de genre g. On donne un bref aperçu de l'algorithme permettant d'établir le théorème de réduction stable, ingrédient essentiel pour obtenir la compacité des $\overline{M}_g$. On en profite pour prouver un résultat d'irréductibilité : on expose la démonstration, due à Harris, du théorème de Severi, longtemps demeuré sans preuve correcte. Précisément, on établit que l'adhérence $V^{d,g}$ du lieu des courbes planes de degré d et de genre g est irréductible.

1 Espaces de modules de courbes

1.1 Courbes et applications stables

Courbes stables Il existe un espace de modules M_g paramétrant les courbes projectives non singulières de genre g. Il n'est pas compact, mais on sait le compactifier en $\overline{M}_g$: les points de $\overline{M}_g$ correspondent aux courbes projectives, connexes, nodales, de genre arithmétique g qui satisfont à une condition de stabilité qui assure que chacune de ces courbes a un groupe d'automorphismes fini. On appelle de telles courbes des courbes stables de genre g. La condition de stabilité est la suivante :

(i) chaque composante irréductible qui est rationnelle et lisse rencontre le reste de la courbe en au moins trois points (on sait qu'un automorphisme de $\mathbf{P}^1$ est déterminé par les images de trois points distincts)

(ii) chaque composante irréductible qui est rationnelle avec un nœud rencontre le reste de la courbe en au moins un point (la normalisée de cette composante est alors une courbe rationnelle ; un automorphisme envoie forcément l'ensemble des pré-images du nœud sur lui-même)

(iii) chaque composante irréductible qui est elliptique et lisse rencontre le reste de la courbe en au moins un point (fixer un point revient à munir la courbe elliptique d'une origine, et le seul automorphisme non trivial qui reste est alors l'involution $x \mapsto -x$)

Plus généralement, on peut considérer l'espace de modules $M_{g,n}$ qui paramètre les courbes projectives non singulières de genre g munies de n points marqués $p_1, \ldots, p_n$, ainsi que sa compactification $\overline{M}_{g,n}$ qui paramètre les courbes projectives nodales et connexes, munies de n points lisses marqués, satisfaisant à une condition de stabilité analogue (qui assure elle aussi la finitude du groupe d'automorphismes de chacune de ces courbes) : on impose ainsi que certaines composantes irréductibles possèdent un certain nombre de points spéciaux, *i.e.* ou bien des points d'intersection avec le reste de la courbe, ou bien des points marqués. On parle alors de courbes stables n-pointées.

Les espaces $\overline{M}_{g,n}$ sont des espaces de modules ("coarse") de dimenson $3g-3+n$. $\overline{M}_{0,n}$ (noter que pour $n \leqslant 2$ cet espace est vide) est un bon espace de modules, et une variété non-singulière.

Applications stables Une courbe n-pointée quasi-stable de genre g est une courbe projective, connexe, réduite, nodale, de genre arithmétique g et munie de n points marqués non singuliers. Autrement dit, il ne lui manque que la condition de stabilité pour être une courbe stable.

Soit X un schéma algébrique projectif, et $(C, \{p_i\}, \mu)$ une application d'une courbe quasi-stable n-pointée sur X. Les points spéciaux d'une composante irréductible E de C sont ses points d'intersection avec le reste de la courbe et les points marqués qu'elle contient. L'application $(C, \{p_i\}, \mu)$ est stable si toute composante irréductible E de C satisfait à :

(i) si $E \cong \mathbf{P}^1$ et si E est contractée sur un point par μ, alors elle contient au moins trois points spéciaux

(ii) si E est de genre arithmétique 1 et contractée sur un point par μ, alors E contient au moins un point spécial

(on fera sans mal le parallèle avec la condition de stabilité pour une courbe).

Pour chaque $\beta \in \mathrm{H}_2(X, \mathbf{Z})$, il existe un espace de modules ("coarse") projectif $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ qui paramètre les applications stables $(C, \{p_i\}, \mu)$ n-pointées, où C est une courbe quasi-stable de genre g n-pointée, et $\mu : C \to X$ représente β (*i.e.* $\mu_*([C]) = \beta$). La construction de ces espaces de modules est expliquée dans [7].

1.2 Compacité : la réduction stable

Pour montrer que les espaces $\overline{M}_g$ (ou plus généralement $\overline{M}_{g,n}$) sont compacts, le point clef est de montrer qu'ils sont propres. On utilise pour cela le critère valuatif de propreté (*cf.* [11] p. 101), et la réduction stable :

Proposition 1.1 (Réduction stable) *Soit B une courbe lisse, 0 un point de B. Si $\mathcal{X} \to B-0$ est une famille plate de courbes stables de genre $g \geqslant 2$, alors il existe un changement de base fini $B' \to B$ étale sauf éventuellement au dessus de 0, et une famille de courbes stables $\mathcal{X}'$ étendant le produit fibré $\mathcal{X} \times_{B-0} B'$.*
Deux telles extensions sont dominées par une troisième ; en particulier, leurs fibres centrales sont isomorphes.

Démonstration : la preuve est algorithmique. On donne ici brièvement les différentes étapes de l'algorithme, telles qu'elles sont présentées dans [10]. Pour une référence plus précise, on se reportera à [6]. On dispose du résultat suivant (*cf.* [11] p. 258) :

Lemme 1.2 *Soit B une courbe lisse, 0 un point fermé de B. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{B-0}$ un sous-schéma fermé, plat sur $B-0$.*
Alors il existe un unique sous-schéma fermé $\overline{X} \subset \mathbf{P}^n_B$ plat sur B, et dont la restriction à $\mathbf{P}^n_{B-0}$ est X.

On peut donc partir d'une famille $\pi : \mathcal{X} \to B$ sur une courbe lisse, lisse au dessus de $B-0$ et avec une fibre centrale $X_0 = \pi^{-1}(0)$ arbitraire (le cas où la fibre générique est singulière sera traité à la fin).

La première étape consiste à résoudre les singularités de la paire $(\mathcal{X}, X_0)$. Par une série d'éclatements, on arrive à $\mathcal{X}$ lisse et $(X_0)_{\text{red}}$ nodale (X_0 est ensemblistement à croisements normaux). Maintenant, si t est une coordonnée locale sur B et x, y des coordonnées locales sur $\mathcal{X}$, π est donnée par une équation de la forme $t = x^a y^b$.

Ensuite, on effectue un changement de base pour rendre X_0 réduite à croisements normaux : soit m le plus petit commun multiple des multiplicités de toutes les composantes de X_0 ; on effectue le changement de base $t \mapsto t^m$. Il faut alors normaliser l'espace total obtenu. A ce stade de la réduction, π est donnée localement ou bien par $t^n = x$, ou bien par $t^n = xy$ (autour des nœuds de la fibre centrale). Dans ce dernier cas, l'espace total est lisse si et seulement si $n = 1$; sinon il y a une singularité.

Enfin, on résout les singularités de $\mathcal{X}$ par une nouvelle série d'éclatements. L'espace total est à présent lisse, et la fibre centrale réduite et nodale.

En pratique, on en restera bien souvent à ce stade de la réduction. Toutefois, pour obtenir la réduction stable, il convient d'effectuer encore quelques manipulations : on contracte toutes les courbes exceptionnelles du premier type de $\mathcal{X}$ (*i.e.* les courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1 ; il s'agit des composantes rationnelles lisses de la fibre centrale X_0 qui rencontrent le reste de X_0 en un seul point). Pour finir, on contracte les chaînes de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -2.

Pour finir, signalons ce qu'il faut faire dans le cas où la fibre générique est singulière : on commence par effectuer un changement de base pour s'assurer de ce que la monodromie agit trivialement sur les branches de la fibre générique. On applique alors la réduction décrite ci-dessus à la normalisation $\widetilde{\mathcal{X}}$ de l'espace total. A la fin, il peut être nécessaire d'effectuer encore quelques changements de base et éclatements pour que les adhérences respectives des pré-images des nœuds de la fibre générique fournissent des sections disjointes de $\widetilde{\mathcal{X}}$. On les recolle alors convenablement.

En pratique, ce sont souvent des variantes de la réduction stable qui sont utilisées. On peut citer notament la réduction semi-stable. Pour plusieurs exemples pratiques, on renvoie à [10].

1.3 Irréductibilité : le problème de Severi

On présente ici la solution de Joe Harris au problème de Severi (*cf.* [9]) : soit $\mathbf{P}^N$ l'espace projectif paramétrant les courbes planes de degré d ($N = \binom{d+2}{2} - 1$). On note $V^{d,g}$ l'adhérence du lieu des courbes planes réduites et irréductibles, de degré d et de genre géométrique g. Il s'agit de voir que la variété $V^{d,g}$ est irréductible.

Le principe de la preuve est le suivant : on montre d'une part qu'il existe une et une seule composante irréductible de $V^{d,g}$ qui contient $V^{d,0}$ (proposition 1.7), et d'autre part que chaque composante irréductible de $V^{d,g}$ contient une composante irréductible de $V^{d,g-1}$ (proposition 3.1), ce qui implique que toutes les composantes irréductibles de $V^{d,g}$ contiennent la variété irréductible $V^{d,0}$. Le résultat est alors immédiat.

On utilise un argument de monodromie pour démontrer la proposition 1.7, et un argument de dégénérescence pour démontrer la proposition 3.1.

1.3.1 L'argument de monodromie

Groupe de monodromie On considère X et Y deux variétés algébriques irréductibles de même dimension sur $\mathbf{C}$, et $\pi : Y \to X$ une application de degré $d > 0$. Il existe un ouvert de Zariski $U \subset X$ suffisamment petit pour que $\pi : V = \pi^{-1}(U) \to U$ soit un revêtement non ramifié.

Pour tout lacet $\gamma : [0,1] \to U$ de base $p \in U$, et tout point $q_\alpha \in \pi^{-1}(p)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}_\alpha : [0,1] \to V$ de γ dans V tel que $\tilde{\gamma}_\alpha(0) = q_\alpha$. On définit alors une permutation ϕ_γ de la fibre $\Gamma = \pi^{-1}(p)$ qui envoie chaque q_α dans $\tilde{\gamma}_\alpha(1)$. ϕ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, et on a donc un morphisme de groupes $\pi_1(U,p) \to \mathfrak{S}_d$.

L'image de $\pi_1(U,p)$ dans $\mathfrak{S}_d$ ne dépend pas du choix de U, tant que $\pi : V \to U$ n'est pas ramifiée (on montre en effet que c'est aussi l'image dans $\mathfrak{S}_d$ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K(Y)/K(X))$ défini par l'extension $\pi^* : K(X) \to K(Y)$).

Définition 1.3 *Le groupe de monodromie M de $\pi : Y \to X$ est l'image du morphisme $\pi_1(U,p) \to \mathfrak{S}_d$ précédent.*

Proposition 1.4 (position uniforme) *Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une variété irréductible lisse de degré d. Alors l'action de monodromie sur les points d'intersection de X avec un hyperplan général de dimension complémentaire est celle du groupe symétrique tout entier.*

Démonstration : on note W la grassmannienne paramétrant les hyperplans de $\mathbf{P}^n$ de dimension complémentaire à celle de X, et $I \subset W \times X$ le graphe d'incidence :

$$I = \{(H,p) \in W \times X \mid p \in H \cap X\}$$

On appelle π et η les morphismes induits par les projections sur W et X respectivement :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ W & & \end{array}$$

Le théorème de Bertini nous assure de ce que la fibre générique de π est composée de d points distincts. Précisément, on peut considérer U ouvert de Zariski de W tel que $\pi : V = \pi^{-1}(U) \to U$

est non ramifiée. Il s'agit de prouver que le groupe de monodromie M de π est $\mathfrak{S}_d$ tout entier. D'après le lemme élémentaire (1.6) il suffit de prouver que M contient une transposition et que son action est doublement transitive.

On commence par montrer que l'action de M est transitive. Les fibres de η sont des espaces linéaires de dimension $\dim W - 1$. Donc comme X est irréductible, I est aussi irréductible. L'ouvert de Zariski $V = \pi^{-1}(U)$ est donc connexe. Pour H hyperplan général de $\mathbf{P}^n$ et p, p' deux points d'intersection de H et X, on peut tracer un chemin dans V reliant (H, p) et (H, p'). La projection de ce chemin dans W va donc fournir un lacet dont l'action de monodromie envoie (H, p) sur (H, p').

Pour prouver que l'action de M est doublement transitive, on procède de la même manière. Soit $p_0 \in X$. On considère à présent $W' = \pi(\eta^{-1}(X - \{p_0\}))$ et le nouveau graphe d'incidence :

$$I' = \{(H, p) \in W' \times X \mid p \neq p_0\}$$

η envoie I' sur l'ouvert de Zariski $(p \neq p_0) \subset X$, et les fibres sont encore des espaces linéaires de codimension 1 dans W'. Donc comme tout-à-l'heure, I' est irréductible, et tout ouvert de Zariski est connexe par arcs. Pour H général, si p, p' sont deux points d'intersection de X et H distincts de p_0, on peut tracer un chemin dans I' reliant (H, p) et (H, p'). L'action de monodromie de sa projection sur W' va alors fournir une permutation de la fibre $\pi^{-1}(H)$ envoyant p sur p' et laissant p_0 inchangé, comme on voulait.

Enfin, tenant compte du lemme ci-dessous (1.5), pour voir que M contient une transposition il suffit de trouver un hyperplan H dont la fibre contient exactement $d - 1$ points. Un hyperplan général tangent en un et un seul point à X convient.

□

Lemme 1.5 *Soit $\pi : Y \to X$ une application holomorphe de degré d. S'il existe un point $p \in X$ tel que la fibre $\pi^{-1}(p)$ soit constituée d'exactement $d - 1$ points ($d - 2$ points simples $q_1, \ldots, q_{d-2}$ et un point double q_{d-1}) et si Y est localement irréductible en q_{d-1}, alors le groupe de monodromie de π contient une transposition.*

Preuve : on considère un disque $\Delta \subset X$ autour de p tel que les points $q_1, \ldots, q_{d-2}$ possèdent des voisinages disjoints $\Delta_1, \ldots, \Delta_{d-2}$ s'envoyant isomorphiquement sur Δ et tel que la composante connexe Δ_{d-1} de $\pi^{-1}(\Delta)$ contenant q_{d-1} soit irréductible et disjointe des autres Δ_i.

Soit $U \subset X$ un ouvert de Zariski tel que $\pi : V = \pi^{-1}(U) \to U$ soit non ramifiée, et considérons $p' \in \Delta \cap U$. On a alors $\pi^{-1}(p') = \{q'_1, \ldots, q'_d\}$ avec $q'_i \in \Delta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d-2$ et $q_{d-1}, q_d \in \Delta_{d-1}$. Comme Δ_{d-1} est irréductible, $\Delta_{d-1} \cap V$ est connexe par arcs. L'action de monodromie associée à la projection d'un chemin dans $\Delta_{d-1} \cap V$ reliant q'_{d-1} à q'_d est alors la transposition qui échange q'_{d-1} et q'_d.

□

Lemme 1.6 *Soit M un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(i) l'action de M est doublement transitive (autrement dit, étant donnés trois éléments distincts a, b, c dans $\{1, \ldots, n\}$, il existe un élément de M qui envoie b sur a et qui laisse c invariant

(ii) M contient une transposition

Alors M est le groupe symétrique tout entier.

Preuve : il suffit de montrer que M contient toutes les transpositions. Pour $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$[1, q][1, p][1, q] = [p, q]$$

donc il suffit de prouver que M contient toutes les transpositions du type $[1,p]$.

Quitte à changer les notations, on peut supposer que M contient la transposition $[1,2]$. Soit $p \in \{1,\dots,n\}$. On considère $\sigma \in M$ qui envoie p sur 2 sans toucher à 1. Alors

$$\sigma^{-1}[1,2]\sigma = [1,p]$$

$\square$

On pourra se reporter à l'article de Joe Harris [8] pour la définition du groupe de monodromie, et son application à la résolution de quelques problèmes énumératifs.

Application au problème de Severi Dans ce paragraphe, on donne la preuve de :

Proposition 1.7 *Il existe une et une seule composante irréductible de $V^{d,g}$ qui contient la variété $V^{d,0}$.*

La variété $V^{d,0}$ est irréductible. En effet, elle est dominée par un ouvert de l'ensemble des triplets de polynômes homogènes en deux variables (un tel triplet (Q_0, Q_1, Q_2) étant donné par l'existence d'un plongement $(x_0 : x_1) \in \mathbf{P}^1 \mapsto (Q_0 : Q_1 : Q_2) \in \mathbf{P}^2$ de degré d).

Un point général de $V^{d,0}$ correspond à une courbe E possédant $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ nœuds . Il existe des déformations de E lissant chacun de ces nœuds . Pour obtenir une courbe de genre g à partir de E, il faut lisser exactement g nœuds . On obtient de la sorte un revêtement de $V^{d,0}$ par $V^{d,g}$ à $\binom{(d-1)(d-2)/2}{g}$ feuillets, chacun d'entre eux correspondant à un choix des g nœuds que l'on lisse. Précisément, si on note

$$I = \{(E, E') \in V^{d,0} \times V^{d,g} \mid E' \text{ est une déformation de } E\}$$

on a une situation

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & V^{d,g} \\ V^{d,0} & \end{tikzcd}$$

où pr_1 est surjective, finie de degré $\binom{(d-1)(d-2)/2}{g}$.

Il suffit alors de montrer que lorsque E varie dans $V^{d,0}$, ces $\binom{(d-1)(d-2)/2}{g}$ feuillets sont échangés transitivement (*i.e.* que l'action de monodromie associée à pr_2 est transitive). Cela découle immédiatement de :

Lemme 1.8 *Quand E varie dans $V^{d,0}$, la monodromie agit sur l'ensemble des nœuds de E comme le groupe symétrique tout entier.*

Preuve : On réalise la courbe E comme la projection d'une courbe rationnelle normale $C \subset \mathbf{P}^d$ depuis un hyperplan général de dimension $d-3$, $\Lambda \subset \mathbf{P}^d$. Les nœuds de E correspondent alors aux cordes de C (*i.e.* les droites de $\mathbf{P}^d$ passant par deux points distincts de C) qui rencontrent Λ, *i.e.* aux points d'intersection de Λ et de la variété des cordes de C. On conclut alors par le lemme de position uniforme (1.4).

$\square$

1.3.2 L'argument de dégénérescence

Dans ce paragraphe, on esquisse la preuve de :

Proposition 1.9 *Chaque composante irréductible de $V^{d,g}$ contient une composante irréductible de $V^{d,g-1}$.*

On peut résumer brièvement l'argument de la manière suivante : on va montrer que chaque composante W de $V^{d,g}$ contient des dégénérescences convenables vers des courbes de genre plus petit. Pour cela, on a besoin de calculer les dimensions de certains systèmes linéaires, et de relier ces estimations à l'allure géométrique de leur membre général ; ensuite on va regarder des courbes de W avec un ordre de contact de plus en plus grand avec une droite fixée $L \subset \mathbf{P}^2$; pour un ordre suffisamment grand quelque chose finit par sauter. On analyse alors la dégénérescence qui apparaît, et on en déduit la proposition.

On ne donnera pas la preuve complète de la proposition, on se contentera d'expliquer comment les dégénérescences apparaissent. Pour une preuve complète, se reporter à [9].

On introduit les familles de courbes qui sont utilisées pour la preuve. Soit $L \subset \mathbf{P}^2$ une droite, fixée définitivement. Pour un entier m, $V_m^{d,g}$ est l'adhérence du lieu des courbes planes réduites et irréductibles E, de degré d et de genre g, ayant un contact d'ordre $(E \cdot L)_p \geqslant m$ en un point lisse p de E (qui est autorisé à bouger sur L lorsque la courbe E varie).

$U_m^{d,g}$ est l'adhérence du lieu des courbes planes réduites $E \subset \mathbf{P}^2$, de degré d et de genre g, ne contenant pas L, et ayant un contact d'ordre m en un certain point p avec un L (qui n'est pas nécessairement un point lisse de E). Remarquons que $V_1^{d,g} = V^{d,g}$ et $U_1^{d,g} = U^{d,g}$.

La clef de la preuve est le résultat suivant :

Lemme 1.10 *Soit W une composante irréductible de $V_m^{d,g}$. Alors W contient :*

(i) ou bien une composante de $V_{m+1}^{d,g}$

(ii) ou bien une composante de $U_m^{d,g-1}$ dont un membre générique est une courbe E satisfaisant à l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

- *E est lisse à son point de contact d'ordre m avec L, et a au plus deux composantes irréductibles*
- *(possible uniquement si $m > 1$) E a exactement deux branches en son unique point p de contact d'ordre m avec L, et chacune de ses (au plus deux) composantes irréductibles contient p.*

Idée de la preuve : on regarde des familles à un paramètre de courbes dans W en prenant l'intersection X de W avec $3d + m - g + 1$ hyperplans généraux de l'espace $\mathbf{P}^N$ des courbes planes de degré d (on connaît en effet : $\dim W = 3d + g - m$). On applique la réduction semi-stable à cette famille : c'est le point important de la preuve, qui va permettre de comprendre la situation géométrique. On obtient une famille à un paramètre $\pi : \mathcal{C} \to B$ de courbes réduites et nodales de genre arithmétique g, d'espace total $\mathcal{C}$ lisse, munie d'un morphisme $\eta : \mathcal{C} \to \mathbf{P}^2$ envoyant les fibres de π dans la courbe plane correspondante (pour cela on effectue une série de changements de bases finis $\alpha : B \to X$ et d'éclatements de l'espace total)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

($\mathcal{X}$ désigne la famille de départ). On impose de plus que la famille $\pi : \mathcal{C} \to B$ soit minimale *i.e.* que toutes les courbes exceptionnelles d'auto-intersection -1 sur lesquelles η est constante ont été contractées.

Si $m > 1$, on sait que pour $b \in B$ général, le diviseur $\eta^*(L)|_{\pi^{-1}(b)}$ possède un seul point p_b de multiplicité m. Par lissité de $\mathcal{C}$, ces points se prolongent en une section Γ de π (si $m = 1$, il est aussi possible d'obtenir une telle section, éventuellement après de nouveaux changements de bases et éclatements). Il faut alors distinguer deux cas :

- si toutes les fibres de π sont lisses, on trouve grâce à Γ un certain $b_0 \in B$ tel que $\mathrm{mult}_{p_{b_0}} \eta^*(L)|_{\pi^{-1}(b)} \geqslant m+1$; on conclut alors que W contient une composante de $V^{d,g}_{m+1}$ car la courbe $E = \eta(C_{b_0})$ bouge dans une famille de dimension $3d+g-m+1 = \dim V^{d,g}_{m+1}$
- si une certaine fibre C_0 de π est singulière, on montre que la composante connexe de $\eta^{-1}(L) \cap C_0$ contenant le point d'intersection $p_0 = C_0 \cap \Gamma$ est contractée sur $\eta(p_0)$ par η. Tenant compte de la minimalité de $\pi : \mathcal{C} \to B$ et du fait que C_0 est une courbe réduite et nodale de genre arithmétique g, on obtient que la courbe $E = \eta(C_0)$ est une courbe de genre géométrique au plus $g-1$ ayant un contact d'ordre au moins m avec L. On montre ensuite que c'est un membre général de $U^{d,g-1}_m$, et qu'il vérifie l'une ou l'autre des deux conditions de *(ii)*.

$\square$

On conclut ensuite en montrant que chaque composante irréductible W de $V^{d,g}_m$ contient une composante irréductible de $U^{d,g-1}_m$ dont le membre général est irréductible (on fait une récurrence sur le degré d, et on utilise le fait que $V^{d,g}_{d+1} = \emptyset$), et en remarquant qu'une composante irréductible de $U^{d,g-1}_1$ dont le membre général est irréductible est en fait une composante irréductible de $V^{d,g-1}$.

2 Théorème de Torelli pour les surfaces K3 et applications

2.1 Théorie des déformations

2.1.1 Théorèmes de trivialisations

Soient $\mathcal{X}$ et B deux variétés complexes, $\phi : \mathcal{X} \to B$ une application holomorphe. On notera $X_t = \phi^{-1}(t)$ la fibre de ϕ au-dessus du point $t \in B$.

Définition 2.1 *On dit que $\mathcal{X} \xrightarrow{\phi} B$ est une famille de variétés complexes si ϕ est une submersion holomorphe propre.*

Si B est connexe et $0 \in B$ est un point de référence, on dit que $\mathcal{X}$ est une famille de déformations de la fibre X_0. Chaque fibre X_t, $t \in B$, est appelée une déformation de X_0.

On dispose en général du résultat suivant, que nous donnons ici sans démonstration (pour une preuve, *cf.* [15]). Il s'applique bien entendu aussi aux familles de variétés complexes.

Proposition 2.2 (Ehresmann) *Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ une submersion propre entre deux variétés différentiables. On suppose B contractile et munie d'un point de base 0. Alors on a un difféomorphisme $T : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\sim", "T"'] \arrow[d, "\phi"'] & X_0 \times B \arrow[dl, "pr_2"] \\ B & \end{tikzcd}$$

La donnée d'une telle trivialisation équivaut donc à la donnée de sa première composante $T_0 : \mathcal{X} \to X_0$, qui doit induire pour chaque t un difféomorphisme $X_t \cong X_0$. En particulier, toutes les fibres sont difféomorphes entre elles. Dans le cas complexe, une telle trivialisation de classe C^∞ permet de voir la structure complexe sur X_t comme une structure complexe sur X_0 *via* le difféomorphisme $T_0 : X_t \to X_0$. Une famille de variétés complexes peut donc être conçue comme une famille de structures complexes sur une variété différentiable sous-jacente fixe.

Dans le cas complexe, on a un résultat plus précis, qui permet de supposer que la famille de structures complexes sur X_0 paramétrée par $t \in B$ varie de façon holomorphe avec t :

Proposition 2.3 *Soit $\phi : \mathcal{X} \to B$ une famille de variétés complexes, 0 un point de B. Alors quitte à remplacer B par un voisinage de 0, il existe une trivialisation $(T_0, \phi) : \mathcal{X} \cong X_0 \times B$ de classe C^∞ et telle que les fibres de T_0 sont des sous-variétés complexes de $\mathcal{X}$.*

2.1.2 L'application de Kodaira-Spencer

Considérons une famille $\phi : \mathcal{X} \to B$ de variétés complexes. La différentielle ϕ_* fournit un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes

$$T_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\phi_*} \phi^* T_B$$

Par restriction à la fibre $X = \phi^{-1}(0)$ on obtient une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur X

$$0 \to T_X \to T_{\mathcal{X}}|_X \to (\phi^* T_B)|_X \to 0$$

$(\phi^* T_B)|_X$ est le fibré trivial $T_{B,0} \times X$. La suite exacte précédente signifie donc que $T_{\mathcal{X}}|_X$ est une extension de T_X par le fibré trivial, caractérisée par le morphisme

$$\rho : \mathrm{H}^0(X, (\phi^* T_B)|_X) = T_{B,0} \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, T_X)$$

Définition 2.4 (application de Kodaira Spencer) *ρ est appelée l'application de Kodaira-Spencer de la famille $\mathcal{X} \to B$ en 0.*

Dans la suite de ce paragraphe, on s'attache à montrer que ρ est l'application classifiante pour la déformation du premier ordre de X induite par la déformation $\mathcal{X}$ (on trouvera une présentation détaillée de ce qui suit dans [15]).

On note B_ε le voisinage d'ordre 1 de 0 dans B (si $\dim B = 1$, c'est simplement Spec $\big(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big)$), et on considère le sous-schéma X_ε de $\mathcal{X}$ défini par $X_\varepsilon = \phi^{-1}(B_\varepsilon)$ (c'est la déformation du premier ordre de X induite par $\mathcal{X}$).

En considérant une trivialisation de $X_\varepsilon \to B_\varepsilon$ dans des ouverts U_i de X

$$\theta_i : \mathcal{O}_{X_\varepsilon}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$$

on montre qu'une déformation du premier ordre est caractérisée par un 1-cocycle de Čech relatif au recouvrement U_i et à valeurs dans le fibré tangent holomorphe T_X. Si on change de trivialisations, on modifie le 1-cocycle précédent par un 1-cobord. Le groupe $\mathrm{H}^1(X, T_X)$ paramètre donc exactement les déformations du premier ordre de X paramétrées par $B_\varepsilon = \mathrm{Spec}\big(\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big)$.

On montre enfin que l'application que l'on vient de construire, qui à une déformation du premier ordre associe une classe $\alpha \in \mathrm{H}^1(X, T_X)$ est exactement l'application de Kodaira-Spencer ρ.

2.1.3 Lissité de la famille locale de déformations

On s'attache ici à présenter, suivant [14] chapitre 1, la preuve du résultat suivant (qui en fait s'applique plus généralement à n'importe quelle variété de Calabi-Yau) :

Théorème 2.5 (Bogomolov-Tian-Todorov) *Soit X une surface K3. Alors la famille universelle locale des déformations de X est lisse.*

On va prouver qu'à tout vecteur tangent de la famille locale des déformations correspond une courbe ; il s'agit de voir que toute déformation du premier ordre de X est induite par une "vraie" déformation (au sens du paragraphe 2.1.1).

Soient $B_n = \mathrm{Spec}\mathbf{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{n+1})$, voisinage à l'ordre n de 0 dans une base B de dimension 1, et $\pi : \mathcal{X}_n \to B_n$ une déformation à l'ordre n de X. On en déduit une classe d'extension $\eta \in \mathrm{H}^1(T_{\mathcal{X}_{n-1}/B_{n-1}})$ correspondant à la suite exacte

$$0 \to T_{\mathcal{X}_{n-1}/B_{n-1}} \to T_{\mathcal{X}_n}|_{\mathcal{X}_{n-1}} \to \pi^*(T_{B_n}|_{B_{n-1}}) \to 0$$

Il y a une obstruction dans $H^2(X, T_X)$ à étendre $\pi : \mathcal{X}_n \to B_n$ en $\pi : \mathcal{X}_{n+1} \to B_{n+1}$; elle s'exprime en considérant la suite exacte

$$0 \to T_X \to T_{\mathcal{X}_n/B_n} \to T_{\mathcal{X}_{n-1}/B_{n-1}} \to 0$$

qui fournit *via* la suite exacte longue associée un opérateur cobord

$$\delta : \mathrm{H}^1(T_{\mathcal{X}_{n-1}/B_{n-1}}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(T_X)$$

L'obstruction est alors égale à $\delta(\eta)$ (si $\delta(\eta) = 0$, la classe d'extension η provient de $\eta' \in \mathrm{H}^1(T_{\mathcal{X}_n/B_n})$ qui définit une extension de $T_{\mathcal{X}_{n+1}}\big|_{\mathcal{X}_n}$ par le fibré trivial $\pi^*(T_{B_{n+1}}\big|_{B_n})$ et prouve que $\pi : \mathcal{X}_n \to B_n$ est la restriction d'une déformation $\pi : \mathcal{X}_{n+1} \to B_{n+1}$). On conclut en remarquant que l'obstruction est forcément nulle car, X étant une surface K3 on $\mathrm{H}^2(T_X) = \mathrm{H}^{1,0}(X)^\vee = 0$.

□

Pour la suite, on n'utilisera pas le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov mais plutôt le résultat voisin suivant, dont la démonstration est sensiblement plus analytique (*cf.* exposé V : dans [12]), et dont on vérifie facilement qu'il s'applique à une surface K3 :

Théorème 2.6 (Kodaira-Nirenberg-Spencer) *Soit X_0 une variété complexe compacte telle que $\mathrm{H}^2(X_0, T_{X_0}) = 0$. Alors il existe une déformation analytique de X_0, paramétrée par un ouvert de $\mathrm{H}^1(X_0, T_{X_0})$ telle que l'application de Kodaira-Spencer associée soit l'identité.*
Cette famille est complète : pour toute famille locale analytique $(\mathcal{X}, X_0) \to (B, 0)$ il existe un morphisme de cette famille dans la précédente.
Si $\mathrm{H}^0(X_0, T_{X_0}) = 0$, alors ce morphisme est unique.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{X}, X_0) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & (\mathcal{U}, X_0) \arrow[d] \\
(B, 0) \arrow[r, dashed] & (\mathrm{H}^1(X_0, T_{X_0}), 0)
\end{tikzcd}$$

2.2 Un théorème de Torelli pour les surfaces K3

2.2.1 Périodes

On traite ici le cas d'une surface X kählerienne compacte ; on spécialisera nos résultats à l'étude des surfaces K3 dans les paragraphes suivants.

Domaine des périodes Pour comprendre ce qui suit, commençons par énoncer le résultat facile (on note Q la forme d'intersection sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{R})$, et H la forme hermitienne sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$ définie par $H(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \bar{\beta})$) :

Lemme 2.7 *Soit X une surface kählerienne compacte. La décomposition de Hodge de poids 2 sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$ polarisée par Q est déterminée par la donnée du sous-espace vectoriel complexe $\mathrm{H}^{2,0}(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$. Celui-ci doit être totalement isotrope pour Q, et induire une restriction de H qui soit définie positive.*

Preuve : on suppose connaître $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ satisfaisant à toutes les conditions précédentes. Alors on a nécessairement $\mathrm{H}^{2,0}(X) \cap \mathrm{H}^2(X, \mathbf{R}) = 0$, car sinon $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ contiendrait un élément réel isotrope pour Q, ce qui est impossible car Q et H coïncident sur les éléments réels.

Il suffit alors de poser $\mathrm{H}^{0,2}(X) = \overline{\mathrm{H}^{2,0}(X)}$; on a d'après ce qui précède $\mathrm{H}^{2,0}(X) \cap \mathrm{H}^{0,2}(X) = 0$ et on définit $\mathrm{H}^{1,1}(X) = (\mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X))^{\perp}$. On a alors bien une décomposition

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$$

orthogonale pour H.

$\square$

On note $h = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(K_X)) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^{2,0}(X)$ le genre géométrique de X.

Définition 2.8 *Le domaine des périodes Ω de la surface X est la partie de la grassmannienne $\mathbf{G}(\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C}), h)$ constituée des h-plans complexes de $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$ qui sont isotropes pour Q et induisent une restriction de H définie positive.*

On peut dire que chaque point de Ω correspond à une structure de Hodge possible induite par une structure complexe possible sur la variété différentiable sous-jacente à X.

Application des périodes Considérons une surface complexe X_0 et $\phi : (\mathcal{X}, X_0) \to (B, 0)$ une déformation de X_0. On a vu au paragraphe 2.1.1 que l'on peut voir une telle déformation comme une famille de structures complexes X_t sur la variété différentiable X sous-jacente à X_0. Ainsi, à tout point $t \in B$ est associée une structure de Hodge sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$ (on peut en général définir une structure de Hodge sur une surface complexe, sans supposer qu'elle soit kählerienne ; *cf.* [2]).

Définition 2.9 *L'application $\mathcal{P} : B \to \Omega$ définie par $\mathcal{P}(t) = (\mathrm{H}^{2,0}(X))_t$ est appelée l'application des périodes de la déformation ϕ.*

On montre que $\mathcal{P}$ est holomorphe, et on sait calculer sa différentielle. On a un homomorphisme de cup-produit contraction

$$K : \mathrm{H}^1(X_0, T^{1,0}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(\mathrm{H}^{2,0}(X_0), \mathrm{H}^{1,1}(X_0)\right)$$

obtenu par contraction avec $\mathrm{H}^{2,0}(X_0) \cong \mathrm{H}^0(X_0, \Omega^2_{X_0})$. Si μ est un point de la grassmannienne $\mathbf{G}(\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C}), h)$, on a une identification canonique $T_\mu \mathbf{G}(\mathrm{H}^2, h) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu, \mathrm{H}^2/\mu)$, où$\mathrm{H}^2$ désigne $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$. Ω est un ouvert de la sous-variété de $\mathbf{G}(\mathrm{H}^2, h)$ définie par $Q(\mu, \mu) = 0$. L'espace tangent en μ à Ω s'identifie donc à

$$T_\mu \Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu, \mu^\perp/\mu) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu, \mathrm{H}^{1,1}_\mu)$$

En particulier, si μ_0 est la période de X_0, alors

$$T_{\mu_0} \Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(\mathrm{H}^{2,0}(X_0), \mathrm{H}^{1,1}(X_0)\right)$$

Ceci étant dit, la commutativité du diagramme suivant fournit une expression explicite de la différentielle de l'application des périodes :

$$\begin{tikzcd}
T_0 B \arrow[rr, "d\mathcal{P}_0"] \arrow[dr, "\rho"'] & & T_{\mu_0}\Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(\mathrm{H}^{2,0}(X_0), \mathrm{H}^{1,1}(X_0)\right) \\
& \mathrm{H}^1(X_0, T^{1,0}_{X_0}) \arrow[ur, "K"'] &
\end{tikzcd}$$

2.2.2 Théorème de Torelli local

On suppose à présent que X_0 est une surface K3. Alors $\mathrm{H}^{2,0}(X_0)$ est de dimension 1, engendré par une 2-forme holomorphe partout non nulle.

Remarque 2.10 *La grassmannienne $\mathbf{G}(\mathrm{H}^2, h)$ est alors simplement l'espace projectif associé à $\mathrm{H}^2(X_0, \mathbf{C})$, et le domaine des périodes Ω est un ouvert de la quadrique définie par*

$$Q(\varphi, \varphi) = 0$$

Sous ces hypothèses, le morphisme de cup-produit contraction du paragraphe précédent fournit un isomorphisme

$$K : \mathrm{H}^1(X_0, T^{1,0}_{X_0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(\mathrm{H}^{2,0}(X_0), \mathrm{H}^{1,1}(X_0)\right)$$

Le théorème de Kodaira-Nirenberg-Spencer s'applique à X_0, et fournit un espace de déformations locales universelles de X_0 paramétré par un voisinage ouvert de $\mathrm{H}^1(X_0, T^{1,0}_{X_0})$ tel que l'application ρ de Kodaira-Spencer soit l'identité. Tenant compte du diagramme commutatif précédent, on voit que $d\mathcal{P}_0$ s'identifie à K, et est donc un isomorphisme. Ceci prouve le résultat suivant, qui constitue un théorème de Torelli local pour les surfaces K3 :

Théorème 2.11 (Andreotti-Weil) *L'application des périodes associée à la famille universelle des déformations locales d'une surface K3 est un isomorphisme local.*

2.2.3 Théorème de Torelli

Si X et X' sont deux surfaces K3, on dit qu'un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbf{Z})$ est une isométrie de Hodge si elle conserve la décomposition de Hodge sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$ induite par

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C}) = \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$$

On dit que c'est une isométrie de Hodge effective si $\varphi(\mathcal{E}_X) = \mathcal{E}_{X'}$ et $\varphi(\mathcal{C}_X^+) = \mathcal{C}_{X'}^+$, où $\mathcal{E}_X$ et $\mathcal{C}_X^+$ désignent respectivement l'ensemble des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$ et l'une des deux composantes connexes de l'ensemble $\mathcal{C}_X$ des classes $\alpha \in \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$ telles que $Q(\alpha, \alpha) > 0$.

Théorème 2.12 (Torelli) *Soient X et X' deux surfaces K3 telles qu'il existe une isométrie de Hodge effective $\varphi : \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbf{Z})$. Alors il existe un isomorphisme unique*

$$u : X' \xrightarrow{\sim} X$$

tel que $\varphi = u^*$.

L'idée de la preuve est la suivante (pour une démonstration complète, on renvoie aux exposés de Beauville dans [12]) :

On prouve tout d'abord un théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer, qui sont des surfaces K3 particulières. On montre ensuite que les périodes des surfaces de Kummer sont denses dans le domaine des périodes Ω des surfaces K3.

Par application du théorème de Torelli local, on construit sur un ouvert $S \subset \Omega$, et deux familles de surfaces K3 $(X_s)_{s \in S}$ et $(X'_s)_{s \in S}$ telles que $X_0 = X$ et $X'_0 = X'$.

D'après ce qui précède, S contient une partie dense $T \subset S$ telle que pour chaque $t \in T$, les surfaces X_t et X'_t sont des surfaces de Kummer. Ces dernières, ayant la même période, sont isomorphes par le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer.

Pour conclure, on invoque alors un lemme du à Burns et Rapoport qui assurent que ces isomorphismes $X'_t \cong X_t$ "convergent" pour fournir un isomorphisme $X' \cong X$.

2.3 Propriétés géométriques des surfaces K3

Surfaces K3 marquées Soit L un groupe abélien libre de rang 22, muni d'une forme quadratique entière de discriminant -1, paire, et de signature $(3, 19)$. On note $(u, v) \mapsto u \cdot v$ la forme bilinéaire associée, ainsi que son prolongement à l'espace vectoriel complexe $L_{\mathbf{C}} = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$.

On désigne par $K_{20} \subset \mathbf{P}(L_{\mathbf{C}})$ la quadrique des droites isotropes de $L_{\mathbf{C}}$, et par Ω l'ouvert de K_{20} défini par la relation $z \cdot \bar{z} > 0$ (z étant un représentant d'un point de K_{20}).

On a vu que si X est une surface K3, alors le groupe abélien libre $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$/torsion muni de la forme d'intersection Q est isomorphe à L (le plus souvent on identifiera ce groupe à $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$). Ceci motive la définition d'une surface K3 marquée :

Définition 2.13 *Une surface K3 marquée est un couple (X, σ), où X est une surface K3 et σ un isomorphisme $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \cong L$ préservant les formes quadratiques.*

On introduit une nouvelle application des périodes, valable pour les surfaces K3 marquées. Si (X, σ) est une surface K3 marquée, alors l'espace vectoriel $\mathrm{H}^{2,0}(X)$ des 2-formes holomorphes globales sur X est une droite isotrope de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$. L'image de cette droite par l'isomorphisme $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C}) \cong L_{\mathbf{C}}$ induit par σ est un point de Ω, que l'on apellera période de la surface K3 marquée (X, σ). On définit de la sorte une application

$$\mathcal{P} : \widetilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \Omega$$

de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}$ des surfaces K3 marquées à valeurs dans Ω. On sait par le théorème de Torelli local pour les surfaces K3 que l'image de $\mathcal{P}$ est un ouvert, qui peut être recouvert par des ouverts

U pour lesquels il existe une surface K3 marquée universelle *i.e.* un morphisme propre et lisse $f : X \to U$ tel que chaque fibre X_t soit une surface K3 marquée de période t.

On a une conséquence facile du théorème de Torelli :

Proposition 2.14 *Soient (X, σ) et (X', σ') deux surfaces K3 marquées admettant la même période. Alors X et X' sont isomorphes.*

Preuve : on dispose d'une isométrie de Hodge

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{(\sigma')^{-1} \circ\, \sigma} \mathrm{H}^2(X', \mathbf{Z})$$

à partir de laquelle il est possible de construire une isométrie de Hodge effective. Le théorème de Torelli fournit alors un isomorphisme

$$X' \xrightarrow{\sim} X$$

□

Groupe de Picard Considérons une surface K3 marquée (X, σ), et notons $z \in \Omega$ sa période. Le théorème de Lefschetz sur les classes (1,1) nous dit que $\mathrm{Pic}(X)$ est exactement le noyau de l'application canonique $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^{0,2}(X)$. On en déduit

$$\mathrm{Pic}(X) = \{\gamma \in \mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z}) \text{ tel que } \gamma.z = 0\}$$

L'équation $\gamma.z = 0$ définit un hyperplan dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{C})$ (ou $L_{\mathbf{C}}$), et les éléments du groupe de Picard correspondent aux intersections de cet hyperplan avec le réseau $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{Z})$. Pour une surface K3 générique, cette intersection est réduite à 0, et $\mathrm{Pic}(X)$ est trivial.

Adaptant ce raisonnement au cas d'une surface K3 algébrique, on obtient que le groupe de Picard d'une surface K3 algébrique générique est isomorphe à $\mathbf{Z}$. Le générateur positif est alors appelé la classe primitive.

Simple connexité des surfaces K3

Théorème 2.15 *Toutes les surfaces K3 sont difféomorphes entre elles. Elles sont simplement connexes.*

On renvoie à [12], exposé VI, pour une démonstration complète. Soit g un entier. Une surface K3 spéciale de type g est une surface K3 dont le groupe de Picard est cyclique et engendré par un élément L tel que $(L \cdot L) = 2g - 2$. On démontre alors :

(i) l'ensemble des périodes des surfaces K3 marquées spéciales de type g est dense dans l'image de $\mathcal{P}$.

(ii) une surface K3 spéciale de type 3 est isomorphe à une surface de degré 4 dans $\mathbf{P}_3$.

Une surface K3 marquée (X, σ) s'insère dans une famille de surfaces K3 marquées, paramétrée par un ouvert $U \subset \Omega$ que l'on peut supposer connexe. D'après ce qui précède, il existe dans cette famille une surface K3 marquée spéciale de type 3 : la surface X est donc difféomorphe à une surface de degré 4 dans $\mathbf{P}_3$. Mieux, le théorème de Torelli permet d'affirmer que X est une déformation d'une quartique de $\mathbf{P}^3$.

Les surfaces de degré 4 dans $\mathbf{P}_3$ forment classiquement une famille algébrique paramétrée par un ouvert de Zariski de $\mathbf{P}_{34} = \mathbf{P}(\mathrm{H}^0(\mathbf{P}_3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(4)))$, qui est nécessairement connexe. On obtient d'ores et déjà que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes.

Enfin le théorème de Lefschetz en homotopie permet d'affirmer qu'une surface algébrique lisse plongée dans $\mathbf{P}_3$ est simplement connexe, prouvant par là la simple connexité des surfaces K3.

Remarque 2.16 *On retiendra également de ce qui précède que toute surface K3 s'obtient comme une déformation d'une surface K3 algébrique, et plus précisément d'une quartique de* $\mathbf{P}^3$.

Si d est un entier compris entre 0 et 20 les périodes des surfaces K3 marquées dont le groupe de Picard est de rang d sont également denses dans l'image de l'application des périodes (*cf.* [12]), et on en tire les mêmes conséquences que précédemment.

3 Démonstration du théorème de Chen

On présente ici le résultat établi par Xi Chen dans [4] :

Théorème 3.1 *Toutes les courbes rationnelles dans la classe primitive d'une surface K3 algébrique de genre $g \geqslant 2$ générique sont nodales.*

3.1 L'argument de dégénérescence

3.1.1 On va utiliser la dégénérescence d'une surface K3 générale vers une surface K3 S pour laquelle la forme d'intersection sur le groupe de Picard peut être représentée par

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Précisément, $\mathrm{Pic}(S)$ est engendré par deux diviseurs effectifs C et F tels que $C^2 = -2$, $F^2 = 0$ et $C \cdot F = 1$.

La formule du genre permet de calculer $p_a(C) = 0$ et $p_a(F) = 1$; on réalise S comme une fibration elliptique de $\mathbf{P}^1$. On sait qu'il y a exactement 24 courbes rationnelles dans le pinceau $|F|$ pour S générale (*cf.* [10]). Une telle surface K3 sera appelée une surface K3 BL, pour Bryan et Leung, conformément à la notation de [4].

3.1.2 D'après ce qu'on a vu sur l'espace de modules des surfaces K3, une surface K3 BL S est dans le bord de l'espace de modules des surfaces K3 de genre g ; pour S, le diviseur $C + gF$ correspond à la classe primitive des surfaces K3 génériques.

Chaque courbe dans le système linéaire $|C + gF|$ est composée d'une courbe C à laquelle sont attachées g queues elliptiques de $|F|$. On en déduit qu'une courbe D dans $|C + gF|$ est l'image d'une application rationnelle stable si et seulement si elle s'écrit

$$D = C \cup m_1 F_1 \cup \dots m_{24} F_{24}$$

où $F_1, \dots, F_{24}$ désignent les 24 courbes nodales du pinceau $|F|$, et les m_i sont des entiers tels que $\sum m_i = g$.

Une telle courbe est évidemment nodale dès qu'elle est réduite (*i.e.* dès que tous les m_i sont inférieurs à 1). Comprendre le cas où D n'est pas réduite constitue l'une des principales difficultés de la preuve.

3.1.3 Nous sommes maintenant en mesure de formuler précisément l'argument de dégénérescence. On considère $\mathcal{X}$ une famille lisse de surfaces K3 de genre g sur le disque Δ (on désignera par t une coordonnée holomorphe locale de Δ), telle que la fibre centrale X_0 soit une surface K3 BL, que nous noterons S. Soit $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ une famille plate de courbes rationnelles sur Δ telle que la fibre générale Y_t soit une courbe dans la classe primitive de X_t, et $Y_0 \in |\mathcal{O}_S(C + gF)|$; cette famille est obtenue à partir d'une famille de courbes rationnelles sur le disque privé de l'origine, il peut donc être nécessaire d'effectuer un changement de base de degré α pour obtenir une telle famille $\mathcal{Y}$.

Soit E l'une des 24 courbes nodales dans le pinceau $|\mathcal{O}_S(F)|$, $p \in E$ le nœud . Si Y_0 contient E avec multiplicité m, il suffit de prouver que la fibre générique Y_t a m nœuds au voisinage de E. Si $m = 1$, c'est immédiat. Sinon il va falloir éclater $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ le long de E : c'est ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

3.2 Cas d'une fibre centrale non réduite

3.2.1 Réductions

On se place pour commencer sous les hypothèses et notations de 3.1.3. Si on éclate $\mathcal{X}$ le long de E, il apparaît un diviseur exceptionnel qui est une surface réglée sur E, isomorphe à $\mathbf{P}(N_{E/\mathcal{X}})$ (où $N_{E/\mathcal{X}}$ désigne comme d'habitude le fibré normal de $E \subset \mathcal{X}$). On a une suite exacte

$$0 \to N_{E/S} \to N_{E/\mathcal{X}} \to N_{S/\mathcal{X}}\big|_E \to 0$$

On remarque que les deux extrémités de cette suite sont isomorphes à $\mathcal{O}_E$.

Comme E est une courbe elliptique, il existe exactement deux surfaces réglées $\mathbf{P}W$ sur E, où W est un fibré vectoriel de rang 2 satisfaisant à une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_E \to W \to \mathcal{O}_E \to 0$$

Si $W = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E$ alors $\mathbf{P}W \cong \mathbf{P}^1 \times E$ est la surface réglée triviale, et si W est indécomposable, on obtient l'autre surface réglée sur E, que l'on appellera surface tordue. On trouvera dans [3] une étude détaillée des surfaces réglées.

Pour notre preuve, il est essentiel de s'assurer que le diviseur exceptionnel est une surface réglée tordue. Dans [4], Xi Chen prouve :

Proposition 3.2 *Si la classe de Kodaira-Spencer de la déformation $\mathcal{X}$ est générale, alors $N_{E/\mathcal{X}}$ est indécomposable.*

Néanmoins, même si on suppose notre famille $\mathcal{X}$ générale, ce résultat ne permet pas d'affirmer directement que le fibré $N_{E/\mathcal{X}}$ est trivial : on a en effet du effectuer un changement de base de degré α pour construire la famille $\mathcal{Y}$, et si $\alpha > 1$ la classe de Kodaira-Spencer de la famille résultante s'annule.

Pour régler ce problème, il faut effectuer non pas un éclatement, mais toute la série d'éclatements suivante :

- on note $\mathcal{X}^{(0)} = \mathcal{X}$, et $E_0 = E$; p_0 désigne le nœud de E_0
- soit $\mathcal{X}^{(1)} \to \mathcal{X}^{(0)}$ l'éclatement de $\mathcal{X}^{(0)}$ le long de E_0. La fibre centrale $X_0^{(1)}$ s'écrit comme la réunion
$$X_0^{(1)} = S_0 \cup S_1$$
où S_0 est la transformée propre de la fibre centrale de départ S, et S_1 est une surface réglée sur E_0. Si S_1 est tordue, alors on s'arrête. Sinon on a $S_1 \cong \mathbf{P}^1 \times E_0$.
- La famille totale $\mathcal{X}^{(1)}$ acquiert une singularité due à l'éclatement : il existe un point $p_1 \neq p_0$ dans la fibre F_{p_0} de $S_1 \to E_0$ au dessus de p_0 au voisinage duquel $\mathcal{X}^{(1)}$ est donnée par l'équation $xy = tz$.
On note E_1 la courbe du pinceau $|\mathcal{O}_{S_1}(E_0)|$ passant par le point p_1. Soit alors $\mathcal{X}^{(2)} \to \mathcal{X}^{(1)}$ l'éclatement de $\mathcal{X}^{(1)}$ le long de la courbe E_1. La fibre centrale $X_0^{(2)}$ est la réunion
$$X_0^{(2)} = S_0 \cup S_1 \cup S_2$$
où S_0 et S_1 sont les transformées propres des S_0 et S_1 précédents, et S_2 est une surface réglée sur la courbe E_1. Si S_2 est tordue, on s'arrête, et sinon $S_2 \cong \mathbf{P}^1 \times E_1$.
- On continue ainsi par récurrence jusqu'à ce que le dernier diviseur exceptionnel soit une surface réglée tordue. Précisément, partant d'une série d'éclatements
$$\mathcal{X}^{(n)} \to \mathcal{X}^{(n-1)} \to \cdots \to \mathcal{X}^{(1)} \to \mathcal{X}^{(0)} = \mathcal{X}$$

on regarde la fibre centrale

$$X_0^{(n)} = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_n$$

Si la surface réglée $S_n \to E_{n-1}$ est tordue, alors on s'arrête. Sinon $S_n \cong \mathbf{P}_1 \times E_{n-1}$. La famille totale $\mathcal{X}^{(n)}$ a une singularité : il existe un point $p_n \neq p_{n-1}$ dans la fibre $F_{p_{n-1}}$ de $S_n \to E_{n-1}$ au dessus de p_{n-1} au voisinage duquel $\mathcal{X}^{(n)}$ est donnée par $xy = t^n z$. On note alors E_n la courbe du pinceau $|\mathcal{O}_{S_n}(E_{n-1})|$ passant par p_n, et on considère $\mathcal{X}^{(n+1)} \to \mathcal{X}^{(n)}$ l'éclatement de $\mathcal{X}^{(n)}$ le long de E_n.

A priori on ne peut pas être sûr que cette série d'éclatements s'arrête. Pourtant, si $\mathcal{X}$ est obtenue en appliquant un changement de base de degré α à une famille de surfaces K3 dont la classe de Kodaira-Spencer est générale, alors la série d'éclatements s'arrête exactement au cran α (autrement dit, la surface réglée S_α est tordue, et S_n est triviale pour tout $n < \alpha$). On s'en aperçoit plus facilement en procédant à un éclatement avant le changement de base : on éclate la famille $\mathcal{X}$ dont la classe de Kodaira-Spencer est générale le long de E. On obtient alors un diviseur exceptionnel S_α isomorphe à $\mathbf{P}(N_{E/\mathcal{X}})$ dans la fibre centrale, avec $N_{E/\mathcal{X}}$ indécomposable d'après la proposition 3.2. Après un changement de base de degré α, la famille totale $\widetilde{\mathcal{X}}$ est singulière le long de E : elle est donnée localement par $xy = t^\alpha$ au voisinage d'un point lisse de E. Si on résout ces singularités génériques, on obtient une chaîne de surfaces réglées $S_1, \ldots, S_{\alpha-1}$ entre $S_0 = S$ et S_α. La famille résultante est alors exactement la famille $\mathcal{X}^{(\alpha)}$ précédente.

Pour chaque entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant \alpha$, on note $\mathcal{Y}^{(n)}$ la transformée propre de $\mathcal{Y}^{(0)} = \mathcal{Y}$. Il reste encore un problème à régler avant de pouvoir construire notre preuve : il est possible que la fibre centrale $Y_0^{(\alpha)}$ ne soit pas très facile à étudier. Par exemple, on peut envisager que certaines $Y_0^{(n)}$ contiennent des courbes multiples E_i. Pour s'assurer d'une situation convenable, il peut être nécessaire d'effectuer un changement de base de degré plus grand que prévu.

Introduisons quelques notations supplémentaires : soit $q_0 = C \cap E_0$ le point d'intersection de C et E_0 dans S_0. On note F_{q_0} la fibre de $E_1 \to E_0$ au dessus de q_0, et q_1 l'intersection dans S_1 de F_{q_0} et E_1. On définit ainsi par récurrence une suite de points q_i, en appelant $q_i = F_{q_{i-1}} \cap E_i$ et $F_{q_{i+1}}$ la fibre de $S_{i+1} \to E_i$ au dessus de q_i. Par ailleurs, on note toujours m la multiplicité de la courbe nodale E dans la fibre centrale Y_0 (on suppose bien entendu $m \geqslant 1$).

On part toujours d'une famille $\mathcal{X}$ dont la classe de Kodaira-Spencer est générale. On conserve toutes les notations précédentes. En effectuant explicitement une résolution semi-stable de $\mathcal{X}^{(\alpha)}$, Xi Chen montre :

Proposition 3.3 *Il existe un choix convenable de α tel que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $0 \leqslant n \leqslant \alpha$:*

(i) la fibre centrale $Y_0^{(n)}$ ne contient aucune des courbes E_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$

(ii) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\mathcal{Y}^{(n)} \cap S_i$ est une courbe dans le système linéaire $|\mathcal{O}_{S_i}(m_i E_{i-1} + F_{q_{i-1}})|$; $m_1, \ldots, m_\alpha$ sont des entiers naturels tels que $\sum m_i = m$

(iii) $\mathcal{Y}^{(n)} \cap S_n = D \cup \mu E_n$, où D est une courbe du système linéaire $|\mathcal{O}_{S_n}(m_n E_{n-1} + F_{q_{n-1}})|$ et $\mu = \sum_{i \geqslant n+1} m_i$

(iv) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n \leqslant \alpha - 1$, $\mathcal{Y}^{(n)} \cap S_i$ contient la fibre $F_{q_{i-1}}$

Ainsi, les composantes de $Y_0^{(\alpha)}$ au dessus de E forment une réunion

$$(F_{q_0} \cup D_1) \cup \ldots \cup \left(F_{q_{\alpha-2}} \cup D_{\alpha-1}\right) \cup \Gamma$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant \alpha - 1$, D_i est une courbe sur S_i appartenant au système linéaire $|\mathcal{O}_{S_i}(m_i E_{i-1})|$ ne contenant pas E_i, et Γ est une courbe sur S_α appartenant au système linéaire $|\mathcal{O}_{S_\alpha}(m_\alpha E_{\alpha-1} + F_{q_{\alpha-1}})|$; les D_i sont des composantes qui flottent dans les surfaces intermédiaires S_i, $i < \alpha$. Xi Chen montre ensuite que $m_1 = \ldots = m_{\alpha-1} = 0$, *i.e.* qu'il n'y a pas de composante flottante : $Y_0^{(\alpha)}$ est simplement la réunion $F_{q_0} \cup \ldots \cup F_{q_{\alpha-2}} \cup \Gamma$, où les F_{q_i} forment une chaîne de courbes rationnelles reliant C et Γ (chaîne qui sera contractée par une réduction stable), et Γ est une courbe sur S_α envoyée sur E par une application de degré m.

Ainsi, nos différentes réductions ont permis de faire en sorte que toutes les choses intéressantes se passent dans la surface tordue S_α. Le cœur de la preuve est l'étude des configurations possibles pour Γ, que nous effectuons dans le paragraphe 3.2.3.

3.2.2 Sur les singularités des courbes

On introduit ici une notion concernant les singularités des courbes. Si A est une courbe, on appelle δ-invariant total de A, et on note $\delta(A)$ la différence entre le genre arithmétique de A et le genre géométrique de sa normalisation. Par exemple, si A est une courbe nodale, $\delta(A)$ compte le nombre de nœuds de A. On définit le δ-invariant total de A au voisinage de B, noté $\delta(A, B)$, dans chacun des deux cas suivants :

- si $B \subset A$ est un sous-schéma fermé de A ; $\delta(A, B)$ est alors le δ-invariant total des singularités $p \in A$ qui sont contenues dans B
- si $\mathcal{C} \to \Delta$ est une famille de courbes, $A = C_t$ une fibre générique, $B \subset C_0$ un sous-schéma fermé de la fibre centrale ; $\delta(C_t, B)$ est alors le δ-invariant total des singularités de C_t au voisinage de B

Citons les deux résultats suivants, utiles pour la suite de la démonstration. On se reportera à [4] pour les preuves.

Lemme 3.4 *Soit $\mathcal{C} \subset \Delta^2 \times \Delta_t \to \Delta_t$ une famille réduite et plate de courbes. On suppose $C_0 = \mu_1\Gamma_1 \cup \ldots \cup \mu_n\Gamma_n$, où les Γ_i sont réduites et irréductibles, et les μ_i sont leurs multiplicités respectives dans C_0. Alors*

$$\delta(C_t) \geqslant \sum_{r \neq s} \mu_r \mu_s (\Gamma_r \cdot \Gamma_s)$$

S'il y a égalité, et si de plus les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Γ_r et Γ_s se rencontrent transversalement, i.e. $(\Gamma_r \cdot \Gamma_s) = 1$ *pour $r \neq s$*

(ii) pour chaque composante irréductible $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}$, la fibre centrale Z_0 est réduite, i.e. *$\mathcal{C}$ est constituée d'exactement $\sum \mu_i$ composantes irréductibles*

alors la fibre générale C_t est nodale.

Corollaire 3.5 *Soit $\mathcal{X} \subset \Delta_{xyz} \times \Delta_t \to \Delta_t$ une famille de surfaces, donnée localement par $xy = t^\alpha z$ pour un certain $\alpha > 0$. On note R_1 et R_2 les deux composantes irréductibles de la fibre centrale X_0 (*i.e. *$R_1 = \{x = t = 0\}$ et $R_2 = \{y = t = 0\}$), et E leur intersection. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un sous-schéma fermé et réduit de $\mathcal{X}$, de codimension 1 et tel que $E \not\subset C_0$; on écrit $C_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où $\Gamma_1 \subset R_1$ et $\Gamma_2 \subset R_2$. On pose $\mu_1 = (\Gamma_1 \cdot E)$, et $\mu_2 = (\Gamma_2 \cdot E)$. Si*

(i) chaque composante irréductible de C_0 rencontre E transversalement

(ii) $\mathcal{C}$ est totalement séparée à l'origine

alors

$$\delta(C_t) \geqslant \mu_1 \mu_2$$

Si de plus

(iii) pour chaque composante irréductible $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}$ la fibre centrale Z_0 est réduite

alors la fibre générique Y_t est nodale.

3.2.3 Géométrie dans une surface tordue

Proposition 3.6 *On suppose toutes les réductions du paragraphe 3.2.1 effectuées. Alors*

$$\delta(Y_t^{(\alpha)}, \Gamma) \geqslant m$$

et en cas d'égalité, la fibre générale $Y_t^{(\alpha)}$ a exactement m nœuds au voisinage de Γ. De manière équivalente, $\delta(Y_t, E) \geqslant m$, et en cas d'égalité la fibre générale Y_t a exactement m nœuds au voisinage de E.

Expliquons comment cette proposition permet d'achever la preuve du théorème 3.1. La fibre générale Y_t est rationnelle et de genre g. On a donc $\delta(Y_t) = g$. Tenant compte de la proposition, on peut donc écrire

$$g = \delta(Y_t) \geqslant \sum_E \delta(Y_t, E) \geqslant \sum_E m_E = g$$

où la somme est prise sur les 24 courbes nodales du pinceau $|F|$ de S, et m_E désigne la multiplicité de E dans Y_0. Pour chaque E on a ainsi l'égalité $\delta(Y_t, E) = m_E$. Alors, toujours d'après la proposition, Y_t est nodale au voisinage de chaque E, et le théorème 3.1 est démontré.

Le lemme suivant sera utilisé de façon intensive par la suite ; il constitue la clef de voute de l'étude de la géométrie de Γ.

Lemme 3.7 *Soit $\mathcal{X} \subset \Delta_{xyz} \times \Delta_t \to \Delta_t$ une famille de surfaces, donnée localement par $xy = t^\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$. On écrit la fibre centrale $X_0 = R_1 \cup R_2$, où $R_1 = \{x = t = 0\}$ et $R_2 = \{y = t = 0\}$, et on note $E = R_1 \cap R_2$. Soit $\mathcal{C}$ une famille plate de courbes sur Δ_t, et $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ un morphisme propre préservant la base Δ_t. On suppose $E \not\subset \pi(C_0)$, et on écrit $C_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où $\pi(\Gamma_1) \subset R_1$ et $\pi(\Gamma_2) \subset R_2$. Alors*

$$\pi(\Gamma_1) \cdot E = \pi(\Gamma_2) \cdot E$$

Preuve : quitte à appliquer l'argument suivant à chaque composante irréductible de la désingularisation de $\mathcal{C}$, on peut supposer $\mathcal{C}$ lisse et irréductible. De plus, quitte à effectuer un changement de base, on peut suposer $\alpha = 1$.
Il s'agit alors de voir $\pi_*\Gamma_1 \cdot R_2 = \pi_*\Gamma_2 \cdot R_1$ dans $\mathcal{X}$. Vues les hypothèses sur $\mathcal{C}$, on a $\Gamma_1 \cdot \pi^*(R_1 + R_2) = 0$ et $(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot \pi^* R_1 = 0$ sur $\mathcal{C}$. On en déduit

$$\Gamma_1 \cdot \pi^* R_2 = \Gamma_2 \cdot \pi^* R_1$$

sur $\mathcal{C}$, et le résultat qui nous intéresse s'obtient immédiatement à partir de celui-ci par la formule de projection.

$\square$

Nous avons maintenant toutes les clés en mains pour nous attaquer à la démonstration de la preuve de la proposition 3.6.

Étape 1 On commence par déplier la surface tordue S_α : on considère $\widetilde{E}_{\alpha-1} \to E_{\alpha-1}$ la normalisation de $E_{\alpha-1}$, elle induit

$$\nu : \widetilde{S}_\alpha \cong \mathbf{P}^1 \times \widetilde{E}_{\alpha-1} \to S_\alpha$$

(tous les fibrés de rang 2 sur $\mathbf{P}^1$ sont décomposables)

On note $a, b \in \widetilde{E}_{\alpha-1}$ les pré-images du nœud $p_{\alpha-1} \in E_{\alpha-1}$, $F_a, F_b \subset \widetilde{S}_\alpha$ les fibres au dessus de a et b respectivement. Si $\nu_a : F_a \to F_{p_{\alpha-1}}$ et $\nu_b : F_b \to F_{p_{\alpha-1}}$ désignent les restrictions de ν, on définit $\varepsilon_{ab} = \nu_b^{-1} \circ \nu_a$ et $\varepsilon_{ba} = \nu_a^{-1} \circ \nu_b$, que nous noterons simplement ε toutes les deux par la suite. On écrira $u \xrightarrow{\varepsilon} w$ si $w = \varepsilon(u)$. Remarquons d'ores et déjà que si r_a et r_b désignent les deux pré-images du point singulier p_α, on a $r_a \xrightarrow{\varepsilon} r_b$.

Pour $u \in F_a$, il existe une unique courbe passant par u dans le pinceau $|\mathcal{O}_{\widetilde{S}_\alpha}(\widetilde{E}_{\alpha-1})|$; on définit le point $\phi_{ab}(u)$ comme étant l'unique point d'intersection de cette courbe avec F_b. On définit de manière analogue une application $\phi_{ba} : F_b \to F_a$. Ici encore, nous écrirons simplement ϕ pour l'une ou l'autre de ces applications, et $u \xrightarrow{\phi} w$ signifie $w = \phi(u)$. Sous cette hypothèse, $\overline{uw}$ désignera la courbe de $|\mathcal{O}_{\widetilde{S}_\alpha}(\widetilde{E}_{\alpha-1})|$ passant par u et w.

Notons que si S_α était la surface réglée triviale, alors ε et ϕ coïncideraient. L'application $\phi_{ba} \circ \varepsilon_{ab}$ est un automorphisme de $F_a \cong \mathbf{P}^1$ qui possède un unique point fixe dans le cas présent où S_α est la surface réglée tordue.

Étape 2 On met en relation les points d'intersection de $\widetilde{\Gamma} = \nu^{-1}(\Gamma) \subset \widetilde{S}_\alpha$ avec F_a et F_b ; précisément, on montre

$$\forall u \in F_a,\ w \in F_b \qquad u \xrightarrow{\varepsilon} w \quad \Rightarrow \quad (\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_u = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_w$$

Supposons que $\widetilde{\Gamma}$ rencontre F_a en un point $u \neq r_a$ avec multiplicité k. Remarquant que les branches de $\widetilde{\Gamma}$ en u s'envoient sur les branches de Γ contenues dans l'une des deux composantes irréductibles locales de $X_0^{(\alpha)}$ en $\nu(u)$, où $\mathcal{X}^{(\alpha)}$ est localement donnée par $xy = t^\alpha$, on peut appliquer le lemme 3.7 ; on en déduit qu'il y a nécessairement des branches de Γ dans l'autre composante irréductible locale de $X_0^{(\alpha)}$ en $\nu(u)$, et que les branches sur chacune des deux composantes irréductibles locales doivent rencontrer $F_{p_{\alpha-1}}$ en $\nu(u)$ avec la même multiplicité k. Autrement dit, $\widetilde{\Gamma}$ rencontre nécessairement F_b en $w = \varepsilon(u)$ avec multiplicité k.

Bien entendu, on dispose d'un résultat similaire quand $\widetilde{\Gamma}$ rencontre F_b. Pour tout point $u \neq r_a$ dans F_a, si $w = \varepsilon(u)$, on a $(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_u = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_w$. Pour la paire restante $r_a \xrightarrow{\varepsilon} r_b$, on ne peut plus appliquer le lemme 3.7, car $X_0^{(\alpha)}$ est donnée par $xy = t^\alpha z$ au voisinage de p_α. Cependant, comme les nombre d'intersections de $\widetilde{\Gamma}$ avec F_a et F_b sont égaux, on déduit de ce qui précède que l'on a également $(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{r_a} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{r_b}$.

Étape 3 On introduit quelques notations : soit $N \subset \Gamma$ l'unique composante irréductible telle que

$$N \in |\mathcal{O}_{S_\alpha}(F_{q_{\alpha-1}} + \mu E_{\alpha-1})|$$

pour un certain $\mu \leqslant m$. On note $\widetilde{N} = \nu^{-1}(N)$.

On note $\widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}^{(\alpha)}$ la réduction stable de $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ après normalisation : $\widetilde{Y}_t$ est la normalisation de $Y_t^{(\alpha)}$ pour la fibre générale, et $\widetilde{Y}_0 \to Y_0^{(\alpha)}$ est une application stable sur la fibre centrale.

On dira que deux composantes M_1 et M_2 de $\widetilde{Y}_0$ sont jointes au dessus d'un point $s \in Y_0^{(\alpha)}$ si elles sont reliées par une chaîne de courbes contractées sur s.

La composante de $\widetilde{Y}_0$ qui domine N est isomorphe à $\widetilde{N} \subset \widetilde{S}_\alpha$. Nous désignerons donc chacune de ces deux courbes par $\widetilde{N}$.

Étape 4 On montre ici que l'on peut ranger tous les points de $\widetilde{\Gamma} \cap (F_a \cup F_b)$ de la manière suivante :

$$u_{-k} \xrightarrow{\varepsilon} w_{-k} \xrightarrow{\phi} \cdots \xrightarrow{\phi} u_0 \xrightarrow{\varepsilon} w_0 \xrightarrow{\phi} \cdots \xrightarrow{\phi} u_l \xrightarrow{\varepsilon} w_l$$

où $u_0 = r_a$ et $w_0 = r_b$.

Une S-chaîne est un ensemble de points $\{u_0, w_0, \ldots, u_n, w_n\} \subset \widetilde{\Gamma} \cap (F_a \cup F_b)$ tel que $u_0 \in F_a$ et

$$u_0 \xrightarrow{\varepsilon} w_0 \xrightarrow{\phi} u_1 \xrightarrow{\varepsilon} w_1 \xrightarrow{\phi} \cdots \xrightarrow{\phi} u_n \xrightarrow{\varepsilon} w_n$$

On remarque que $u_{i+1} = \phi \circ \varepsilon(u_i)$ et $w_{i+1} = \varepsilon \circ \phi(w_i)$. Ainsi, comme la surface S_α est tordue, les points d'une S-chaîne sont distincts.

Montrons qu'une S-chaîne maximale contient r_a et r_b : comme $r_a \xrightarrow{\varepsilon} r_b$, il suffit de montrer qu'une S-chaîne maximale contient r_a ou r_b. On raisonne par l'absurde : supposons connaître une S-chaîne maximale $\{u_0, w_0, \ldots, u_n, w_n\}$ ne contenant ni r_a ni r_b. Par maximalité, il n'existe pas de point $w \in F_b$ tel que $w \xrightarrow{\phi} u_0$; autrement dit, il n'existe pas de courbe $\overline{wu_0} \subset \widetilde{\Gamma}$, et $\widetilde{N}$ passe nécessairement par u_0. De la même manière, $\widetilde{N}$ passe forcément par le point w_n.

En appliquant le lemme 3.7 au point $\nu(u_0) = \nu(w_0)$ (distinct de p_α) on voit que la branche de $\widetilde{N}$ en u_0 est jointe au-dessus de $\nu(u_0)$ à une branche de $\widetilde{\Gamma}$ en w_0, *i.e.* ou bien à la branche de $\widetilde{N}$ en w_0 (il n'en existe pas forcément) ou bien à une composante M_1 dominant $\nu(\overline{w_0u_1})$. Le premier cas est interdit par le fait que le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$ est un arbre, et ne contient donc pas de cycle ($\widetilde{Y}_0$ est une courbe quasi-stable de genre 0). On applique à nouveau le lemme 3.7 au point $\nu(u_1) = \nu(w_1)$, et on obtient que M_1 est jointe au-dessus de $\nu(u_1)$ ou bien à $\widetilde{N}$ ou bien à une composante M_2 dominant $\nu(\overline{w_1u_2})$. Ici encore, dans le premier cas on obtient un cycle dans le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$, ce qui est exclu. On continue ainsi jusqu'à obtenir une composante M_n dominant $\nu(\overline{w_{n-1}u_n})$. En appliquant une dernière fois le lemme 3.7, et tenant compte du fait qu'il n'y a pas de courbe $\overline{w_nu} \subset \widetilde{\Gamma}$, on obtient que M_n est jointe au dessus de $\nu(u_n)$ à $\widetilde{N}$, et donc qu'il existe un cycle dans le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$, ce qui est exclu.

On conclut donc comme annoncé qu'un cycle maximal contient nécessairement r_a ou r_b. Le caractère particulier de ces deux points tient au fait qu'ils sont envoyés sur p_α par ν, et qu'en ce point il est impossible d'appliquer le lemme 3.7.

On dispose ainsi des propriétés suivantes concernant les S-chaînes :

– deux S-chaînes maximales sont disjointes

– une S-chaîne maximale contient nécessairement r_a et r_b

On conclut donc qu'il existe une unique S-chaîne maximale, qui contient tous les points de $\widetilde{\Gamma} \cap (F_a \cup F_b)$, ce qui est précisément le résultat que l'on voulait prouver.

Étape 5 On note μ_i la multiplicité de $\overline{w_iu_{i+1}}$ dans $\widetilde{\Gamma}$ $(-k \leqslant i \leqslant l-1)$, où les notations sont celles introduites au début de l'étape 4. On montre ici les inégalités :

$$1 \leqslant \mu_{-k} \leqslant \mu_{-k+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{-1}$$

et

$$\mu_0 \geqslant \mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{l-1} \geqslant 1$$

Soit $-k+1 \leqslant i \leqslant -1$. On a $(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{u_i} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{w_i}$ d'après l'étape 2, ce qui tenant compte de $w_{i-1} \xrightarrow{\phi} u_i \xrightarrow{\varepsilon} w_i \xrightarrow{\phi} u_{i+1}$ s'écrit aussi

$$\mu_{i-1} + (\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_i} = \mu_i + (\widetilde{N} \cdot F_b)_{w_i}$$

On montre une égalité analogue pour $0 \leqslant i \leqslant l-2$, et on voit alors qu'il suffit de prouver que $\widetilde{N}$ n'est autorisée à rencontrer F_a qu'aux points $u_{-k}, u_{-k+1}, \ldots, u_0$ et F_b aux points $w_0, w_1, \ldots, w_l$. Comme on l'a déjà vu, $\widetilde{N}$ contient les points u_{-k} et w_l.

Supposons par l'absurde qu'il existe $w_{-i} \in \widetilde{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant k$, et considérons un tel i maximal. Par applications successives du lemme 3.7 et tenant compte de la maximalité de i, on montre comme dans l'étape 4 que $\widetilde{N}$ est reliée au dessus de $\nu(w_{-i})$ à une composante M_1 dominant $\nu(\overline{w_{-i-1}u_{-i}})$, elle même reliée au dessus de $\nu(w_{-i-1})$ à M_2 dominant $\nu(\overline{w_{-i-2}u_{-i-1}})$, et ainsi de suite jusqu'à M_{k-i} dominant $\nu(\overline{w_{-k}u_{-k+1}})$ et reliée à $\widetilde{N}$ au dessus de $\nu(w_{-k})$. On obtient ainsi un cycle dans le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$, ce qui est exclu.

On conclut donc $w_{-k}, \ldots, w_{-1} \notin \widetilde{N}$ et de manière analogue $u_1, \ldots, u_l \notin \widetilde{N}$, ce qui prouve nos inégalités.

Étape 6 On montre ici que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est totalement séparée en p_α, et donc $|\mu_{-1} - \mu_0| \leqslant 1$

(ii) si N rencontre $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ en u point s distinct de $\nu(w_i)$ et $\nu(u_{i+1})$, alors $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est totalement séparée en s

Il n'y a en effet que trois cas dans lesquels $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ n'est pas totalement séparée en p_α :

- ou bien une composante M_1 dominant $\nu(\overline{w_0 u_1})$ est jointe au dessus de p_α à une composante M_2 dominant $\nu(\overline{w_{-1} u_0})$
- ou bien M_1 est jointe au dessus de p_α à $\widetilde{N}$
- ou bien M_2 est jointe au dessu de p_α à $\widetilde{N}$

Dans chacun de ces cas, on construit un cycle dans le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$ à l'aide du lemme 3.7, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est totalement séparée en p_α. Une variante du lemme 3.7 (*cf.* [4], corollaire 3.5) permet alors d'affirmer que $\widetilde{N}$ ne peut pas être ni tangente en u_0 à F_a, ni tangente en w_0 à F_b. Ceci combiné à l'égalité $(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{u_0} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{w_0}$ donne $|\mu_{-1} - \mu_0| \leqslant 1$ comme dans l'étape 5. Le point (ii) s'obtient de manière analogue.

Étape 7 On montre ici que

$$(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{u_0} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{w_0} = \mu$$

Comme $\widetilde{\Gamma} = (\bigcup \mu_i \overline{w_i u_{i+1}}) \cup \widetilde{N}$ et $N \in |\mathcal{O}_{S_\alpha}(F_{q_{\alpha-1}} + \mu E_{\alpha-1})|$, le fait que Γ soit dans le système linéaire $|\mathcal{O}_{S_\alpha}(mE_{\alpha-1} + F_{q_{\alpha-1}})|$ donne l'égalité

$$m = \mu + \sum \mu_i$$

Par convention, on pose $\mu_i = 0$ pour $i < -k$ ou $i \geqslant l$. D'après l'étape 5, on a

$$\mu_i - \mu_{i-1} = (\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_i}$$

pour $i \leqslant -1$ et

$$\mu_j - \mu_{j+1} = (\widetilde{N} \cdot F_b)_{w_{j+1}}$$

pour $j \geqslant 0$. On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mu = \widetilde{N} \cdot F_a = \sum_{i=0}^{k} (\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_{-i}} &= \sum_{i=-k}^{-1} (\mu_i - \mu_{i-1}) + (\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_0} \\ &= \mu_{-1} + (\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_0} \end{aligned}$$

où $(\widetilde{N} \cdot F_a)_{u_0}$ vaut 0 ou 1 car $\widetilde{N}$ rencontre F_a transversalement en u_0 d'après l'étape 6. On en déduit

$$\mu_{-1} \leqslant \mu \leqslant \mu_{-1} + 1$$

Un calcul analogue pour $\widetilde{N} \cdot F_b$ donne

$$\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0 + 1$$

Vu comment ces deux encadrements ont été obtenus, on a $\mu = \mu_0 + 1$ si et seulement si $w_0 \in \widetilde{N}$, et $\mu = \mu_{-1} + 1$ si et seulement si $u_0 \in \widetilde{N}$. On en conclut immédiatement

$$(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{u_0} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{w_0} = \mu$$

Étape 8 Nous allons maintenant minorer $\delta(Y_t^{(\alpha)}, \Gamma)$. Pour commencer, au voisinage du point p_α, $\mathcal{X}^{(\alpha)}$ est donnée par l'équation locale $xy = t^\alpha z$, et $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est totalement séparée en p_α d'après l'étape 6, donc on peut appliquer le corollaire 3.5 et conclure, tenant compte de $(\widetilde{\Gamma} \cdot F_a)_{u_0} = (\widetilde{\Gamma} \cdot F_b)_{w_0} = \mu$:

$$\delta(Y_t^{(\alpha)}, p_\alpha) \geqslant \mu^2$$

Au voisinage de chaque point $s \in N \cap \nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ distinct de $\nu(w_i)$ et $\nu(u_{i+1})$, $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est totalement séparée d'après l'étape 6, donc on peut appliquer le lemme 3.4 et conclure

$$\delta(Y_t^{(\alpha)}, s) \geqslant \mu_i$$

On note $s_i = (N \cap \nu(\overline{w_i u_{i+1}})) \setminus \{\nu(w_i), \nu(u_{i+1})\}$. Comme $N \in |\mathcal{O}_{S_\alpha}(F_{q_{\alpha-1}} + \mu E_{\alpha-1})|$ et $\nu(\overline{w_i u_{i+1}}) \in |\mathcal{O}_{S_\alpha}(E_{\alpha-1})|$, on a $s_i = \emptyset$ si $w_i \in \widetilde{N}$ ou $u_{i+1} \in \widetilde{N}$.

On pose par convention $\delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) = 0$ si $s_i = \emptyset$. On a vu à l'étape 7 que $s_0 = \emptyset$ si et seulement si $\mu = \mu_0 + 1$. On a ainsi :

$$\delta(Y_t^{(\alpha)}, s_0) \geqslant (\mu_0 + 1 - \mu)\mu_0$$

et de manière analogue

$$\delta(Y_t^{(\alpha)}, s_1) \geqslant (\mu_{-1} + 1 - \mu)\mu_{-1}$$

On note $0 \leqslant a_0 < \ldots < a_n < \ldots$ la suite d'entiers définie par les relations

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{a_0} & > & \mu_{a_0+1} = \mu_{a_0+2} = \ldots = \mu_{a_1} \\ & > & \mu_{a_1+1} = \mu_{a_1+2} = \ldots = \mu_{a_2} \\ & \vdots & \end{array}$$

(les a_i représentent les valeurs où il y a un saut dans la valeur des μ_l). Comme $\mu_{i-1} - \mu_i = (\widetilde{N} \cdot F_b)_{w_i}$ pour $i \geqslant 0$, on a $s_i = \emptyset$ si et seulement si $\mu_{i-1} \neq \mu_i$. En conséquence de quoi, l'inégalité $\delta(Y_t^{(\alpha)}, s) \geqslant \mu_i$ pour $s \in s_i$ donne

$$\sum_{i>0} \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) \geqslant a_0\mu_0 + \sum_{i>0} (a_i - a_{i-1} - 1)\mu_{a_i}$$

On a d'autre part directement d'après la définition des a_i l'égalité

$$\sum_{i \geqslant 0} \mu_i = (a_0 + 1)\mu_0 + \sum_{i>0} (a_i - a_{i-1})\mu_{a_i}$$

On déduit de ces deux relations

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i>0} \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) - \sum_{i \geqslant 0} \mu_i & \geqslant & \displaystyle -\sum_{i \geqslant 0} \mu_{a_i} \\ & \geqslant & -(\mu_0 + (\mu_0 - 1) + \cdots + 2 + 1) \\ & = & \displaystyle -\frac{\mu_0(\mu_0 + 1)}{2} \end{array}$$

Par un argument similaire, on obtient l'inégalité

$$\sum_{i<-1} \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) - \sum_{i<0} \mu_i \geqslant -\frac{\mu_{-1}(\mu_{-1} + 1)}{2}$$

Mettant toutes ces inégalités bout à bout, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta(Y_t^{(\alpha)}, \Gamma) &\geqslant \delta(Y_t^{(\alpha)}, p_\alpha) + \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_{-1}) + \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_0) + \sum_{i>0} \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) + \sum_{i<-1} \delta(Y_t^{(\alpha)}, s_i) \\
&\geqslant \mu^2 + (\mu_{-1} + 1 - \mu)\mu_{-1} + (\mu_0 + 1 - \mu)\mu_0 - \frac{\mu_0(\mu_0+1)}{2} - \frac{\mu_{-1}(\mu_{-1}+1)}{2} \\
&\quad + \sum_i \mu_i \\
&= m + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^2 + \frac{1}{2}(\mu - \mu_{-1})^2 - \frac{1}{2}(\mu - \mu_0) - \frac{1}{2}(\mu - \mu_{-1}) \\
&= m
\end{aligned}$$

en tenant compte de $m = \mu + \sum_i \mu_i$ pour la première égalité, et du fait que $\mu - \mu_i$ vaut 0 ou 1 pour $i \in \{0, 1\}$ pour la seconde. On vient de démontrer la première partie de la proposition 3.6.

Étape 9 Dans tout ce qui suit, on s'occupe du cas où $\delta(Y_t^{(\alpha)}, \Gamma) = m$. Dans ce cas, toutes les inégalités de l'étape 8 sont des égalités. On en déduit que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) toutes les singularités de $Y_t^{(\alpha)}$ au voisinage de Γ se trouvent aux voisinages des points p_α et s_i

(ii) $\delta(Y_t^{(\alpha)}, p_\alpha) = \mu^2$

(iii) $\delta(Y_t^{(\alpha)}, s) = \mu_i^2$ pour $s \in (N \cap \nu(\overline{w_i u_{i+1}})) \setminus \{\nu(w_i), \nu(u_{i+1})\}$

On a également

$$\sum_{i \geqslant 0} \mu_{a_i} = 1 + 2 + \cdots + \mu_0$$

et donc $\mu_{a_0} = \mu_0$, $\mu_{a_1} = \mu_0 - 1$, etc. On a des relations similaires pour les $i < 0$. On en déduit que la quatrième condition suivante est vérifiée également :

(iv) $\widetilde{N}$ rencontre F_a et F_b transversalement à chaque intersection ; $|\mu_i - \mu_{i+1}| \leqslant 1$ pour tout i, et en particulier $\mu_{-k} = \mu_{l-1} = 1$

Étape 10 On montre ici que pour $-k \leqslant i \leqslant l-1$ chaque composante de $\widetilde{Y}_0$ dominant $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ s'envoie birationnellement sur $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$; autrement dit, $\widetilde{Y}_0$ ne contient pas de revêtement multiple de $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$.

Comme $\mu_{-k} = \mu_{l-1} = 1$, c'est vrai pour les courbes $\nu(\overline{w_{l-1} u_l})$ et $\nu(\overline{w_{-k} u_{-k+1}})$. Supposons que le résultat soit faux pour une courbe $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ avec $i \geqslant 0$, et considérons un tel i maximal. Alors il existe une composante M dominant $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ et une application $\pi : M \to \nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ de degré au moins 2. On prétend qu'alors M est reliée au dessus de $\nu(u_{i+1})$ à au moins deux composantes M_1 et M_2 distinctes qui sont chacune ou bien $\widetilde{N}$ ou bien une composante dominant $\nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$.

En effet, de deux choses l'une, ou bien $M \to \nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ n'est pas totalement ramifiée au dessus de $\nu(u_{i+1})$, ou bien elle l'est. Dans le premier cas, il existe deux pré-images x_1 et x_2 de $\nu(u_{i+1})$ distinctes dans M. Dans ce cas, d'après le lemme 3.7, pour $j \in \{1, 2\}$, la branche de M en x_j est reliée au dessus de $\nu(u_{i+1})$ à une composante M_j telle que ou bien $M_j = \widetilde{N}$ ou bien $\pi(M_j) = \nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$, et notre assertion est démontrée. Dans le deuxième cas, il existe un point d'intersection de $\pi(M)$ et $F_{p_{\alpha-1}}$ de multiplicité au moins 2. Toujours d'après le lemme 3.7, M est alors reliée au dessus de $\nu(u_{i+1})$ à une union $\bigcup M_j$ de composantes où chaque M_j est ou bien $\widetilde{N}$ ou bien une composante qui domine $\nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$, et $\pi(\bigcup M_j)$ rencontre $F_{p_{\alpha-1}}$ avec multiplicité au moins 2. Par maximalité de i, chaque composante dominant $\nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$ s'envoie birationnellement sur $\nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$. Comme une intersection entre $\widetilde{N}$ et F_b est transverse (ce qui est aussi évidemment le cas pour une intersection entre $\nu(\overline{w_{i+1} u_{i+2}})$ et F_b), on trouve parmi les M_j au moins deux composantes distinctes dominant ou bien N ou bien $\nu(\overline{w_{i+1}u_{i+2}})$, et l'assertion est démontrée dans ce cas aussi.

Ceci étant prouvé, partant du fait que M est reliée au dessus de $\nu(u_{i+1})$ à au moins deux composantes M_1 et M_2 distinctes qui sont toutes les deux ou bien $\widetilde{N}$ ou bien une composante dominant $\nu(\overline{w_{i+1}u_{i+2}})$, on construit comme d'habitude un cycle dans le graphe dual de $\widetilde{Y}_0$, ce qui est impossible. On en déduit que pour $i \geqslant 0$ chaque composante de $\widetilde{Y}_0$ dominant $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$ s'envoie birationnellement sur $\nu(\overline{w_i u_{i+1}})$.

On utilise un argument semblable pour le cas $i < 0$.

Étape 11 On peut maintenant donner la preuve de la seconde partie de la proposition 3.6. Au voisinage de p_α, $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est constituée de 2μ composantes irréductibles locales, correspondant aux 2μ branches de $\widetilde{Y}_0$ au dessus de p_α. Comme on a l'égalité $\delta(Y_t^{(\alpha)}, p_\alpha) = \mu^2$, on a par le corollaire 3.5 que $Y_t^{(\alpha)}$ est nodale au voisinage de p_α.

Au voisinage d'un point $s \in (N \cap \nu(\overline{w_i u_{i+1}})) \setminus \{\nu(w_i), \nu(u_{i+1})\}$, $\mathcal{Y}^{(\alpha)}$ est constituée de $\mu_i + 1$ composantes irréductibles locales. Comme on a $\delta(Y_t^{(\alpha)}, s) = \mu_i$, on déduit du lemme 3.4 que $Y_t^{(\alpha)}$ est nodale au voisinage de s.

Enfin, comme toutes les singularités de $Y_t^{(\alpha)}$ au voisinage de Γ se trouvent aux voisinages des points p_α et s_i, on en déduit que $Y_t^{(\alpha)}$ est nodale au voisinage de Γ si $\delta(Y_t^{(\alpha)}, \Gamma) = m$. Ceci termine la preuve.

Références

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves, Volume I.* Number 267 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1985.

[2] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 2004.

[3] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes.* Number 54 in Astérique. Société Mathématique de France, 1978.

[4] Xi Chen. A simple proof that rational curves on k3 are nodal. 2001. Prépublication math.AG/0011190.

[5] Olivier Debarre. *Tores et variétés abéliennes complexes.* Number 6 in Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 1999.

[6] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. IHES*, (36) :75–110, 1969.

[7] William Fulton and Rahul Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology. In J. Kollár, R. Lazarsfeld, and D. Morrison, editors, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics : Algebraic Geometry Santa Cruz*, volume 62, pages 45–96, 1995. Prépublication alg-geom/9608011 également.

[8] Joe Harris. Galois groups of enumerative problems. *Duke Math. J.*, (46) :685–724, 1979.

[9] Joe Harris. On the severi problem. *Invent. Math.*, (84) :445–461, 1986.

[10] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of curves.* Number 187 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1998.

[11] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Number 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[12] Séminaire Palaiseau. *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes.* Number 126 in Astérisque. Société mathématique de France, 1985.

[13] Bernard Saint-Donat. Projective models of k3-surfaces. *Am. J. Math.*, (96) :602–639, 1974.

[14] Claire Voisin. *Symétrie miroir.* Number 2 in Panoramas et synthèses. Société Mathématique de France, 1996.

[15] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Number 10 in Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.