①

Déterminant. Exemples et applications.

Notations. $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{k}$ est un corps, A un anneau commutatif et unitaire, E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel (e.v.) de dimension n.

I - Le polynôme déterminant

Préliminaire : la signature

Définition Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le nombre d'inversions de σ est le cardinal $I(\sigma)$ de l'ensemble

$$\mathcal{I}(\sigma) = \{ \{i<j\} \subseteq [\![1,n]\!] : \sigma(i) > \sigma(j) \}.$$

La signature de σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

Proposition ε définit un morphisme de groupes $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ surjectif et de noyau $\mathfrak{A}_n$.

1) Déterminant d'une matrice

Définition Le déterminant (de taille n) est le polynôme

$$\det = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \in \mathbb{Z}[a_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n].$$

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(A)$, on appelle déterminant de M, noté $\det(M)$ ou $|M|$, l'élément de A obtenu en spécialisant $\det$ aux coefficients de M.

Exemples
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \; ; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 \\ + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 \\ - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1. \end{array}$$

Proposition $\det(M) = \det({}^tM)$.

2) Développement de Laplace $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT 1}}$

Théorème Soit $J \subseteq [\![1,n]\!]$ de cardinal p. On a

$$\det = \sum_{\mathrm{Card}(I) = p} (-1)^{|I| + |J|} \cdot \det_{IJ} \cdot \det_{\bar{I}\bar{J}}$$

où pour tout $I = \{i_1 < \cdots < i_p\}$: $\bar{I}$ est son complémentaire, et $|I| = i_1 + \cdots + i_p$; $\det_{IJ}$ est le déterminant de taille p dans $\mathbb{Z}[a_{ij},\ i \in I, j \in J]$.

Complément $(-1)^{|I|+|J|}$ est la signature de l'unique $\rho \in \mathfrak{S}_n$ induisant des bijections croissantes entre I et J, et $\bar{I}$ et $\bar{J}$.

Exemple Développement par rapport à une colonne.

Remarque En considérant la transposée, on peut développer par rapport aux lignes de la même façon.

Proposition La différentielle de $\det$ est l'unique application linéaire envoyant da_{ij} sur $(-1)^{i+j} \det_{[\![1,n]\!]-i,\, [\![1,n]\!]-j}$.

Théorème Le polynôme $\det$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[a_{ij}]$.

II Formes multilinéaires alternées.

1) Le déterminant comme fonction des lignes

Proposition Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$, et M' obtenue par l'opération $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ $(a, b \in A;\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j)$

On a $\det(M') = a \cdot \det(M)$.

Corollaire
$$\begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Application Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, on peut calculer $\det(M)$ par pivot de Gauss.

Théorème $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est inversible ssi $\det(M) \neq 0$.

<u>Théorème</u> Le rang de M est le plus petit entier r tel que tous les mineurs de taille $r+1$ de M sont nuls
(on appelle <u>mineur</u> de M un déterminant obtenu en extrayant une sous matrice)

<u>Corollaire</u> i) $rg(M) = rg({}^tM)$; ii) $rg(M)$ est indépendant du corps de base

<u>Corollaire</u> Si $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k}) : rg(M) \leq r\}$ est fermé pour tout r.

<u>Exemple</u> (déterminant de Vandermonde) $\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \cdots & X_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & X_n & \cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(X_j - X_i)$

<u>Exemple</u> (double alternant de Cauchy)

$$\left| \frac{1}{X_i+Y_j} \right|_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{i<j}(X_i-X_j)(Y_i-Y_j)}{\prod_{i,j}(X_i+Y_j)}.$$

2) <u>Unicité du volume sur un ev de dim. finie</u>

<u>Définition</u> Une forme $f : E^n \longrightarrow \mathbb{k}$ est <u>n-linéaire</u> si $\forall i, \forall x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, x_n \in E$: $f(x_1, \dots, -, \dots, x_n) : E \to \mathbb{k}$ est linéaire,
et <u>alternée</u> si $\forall i \neq j$ $\forall x_1, \dots, x_n$: $x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

<u>Exemple</u> Le déterminant vu comme fonction sur les lignes est une forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{k}^n$.

<u>Théorème</u> Le $\mathbb{k}$-ev $\mathcal{L}_n^a(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

<u>Définition</u> Soit B une base de E. Le <u>déterminant d'une famille de n vecteurs</u> relativement à B est l'unique $\det_B \in \mathcal{L}_n^a(E)$ tel que $\det_B(B) = 1$.

<u>Interprétation</u> $\det_B(e_1, \dots, e_n)$ est le volume orienté du parallélotope défini par $(e_1, \dots, e_n)$ dans l'unité définie par B. (cf. annexe)

<u>Proposition</u> Soit $e_1, \dots, e_n \in E$, et P la matrice de leurs coordonnées dans une base B. Alors $\det_B(e_1, \dots, e_n) = \det(P)$.

<u>Corollaire</u> $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi $\det_B(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.

3) <u>Déterminant d'un endomorphisme</u>

<u>Proposition</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f \in \mathcal{L}_n^a(E)$.
Alors $f \circ (u, \dots, u) \in \mathcal{L}_n^a(E)$.

<u>Définition</u> Le <u>déterminant de l'endomorphisme</u> u est le scalaire $\det(u) \in \mathbb{k}$ tq $\forall f \in \mathcal{L}_n^a(E)$: $f \circ (u, \dots, u) = \det(u) \cdot f \in \mathcal{L}_n^a(E)$.

<u>Proposition</u> Soit B base de E. Alors $\det(u) = \det \mathrm{Mat}_B(u)$.

<u>Corollaire</u> u est inversible ssi $\det(u) \neq 0$.

<u>Proposition</u> Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$.

<u>Corollaire</u> Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(A)$. Alors $\det(MN) = \det(M)\det(N)$

<u>Application : polynôme caractéristique</u>

<u>Déf.-Prop.</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Son <u>polynôme caractéristique</u> χ_u est $\det(X\,Id_n - \mathrm{Mat}_B(u)) \in \mathbb{k}[X]_n$, qui ne dépend pas du choix d'une base B.

<u>Proposition</u> $\lambda \in \mathbb{k}$ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$. On pose de même $\chi_M = \det(X\,Id_n - M)$.
On a $\chi_M = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$
avec $a_i = \sum_{\mathrm{Card}(I) = n-i} \det(M_{II})$.

<u>Théorème</u> (Cayley-Hamilton) $\chi_M(M) = 0$.

<u>Théorème</u> Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(A)$. On a $\chi_{MN} = \chi_{NM}$.

4) <u>Formules de Cramer</u>

<u>Définition</u> Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$. La <u>comatrice</u> de M est $\mathrm{Com}(M) = \left((-1)^{i+j} \det(M_{[\![1,n]\!]-i,\, [\![1,n]\!]-j}) \right)$.

<u>Proposition</u> (formules de Cramer) $M \times {}^t\mathrm{Com}(M) = Id_n$.

Théorème Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$. M est inversible ssi $\det(M) \in A$ est inversible.

III Volume dans un espace euclidien orienté

1) Produit mixte

On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et E euclidien.

Définition Deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E ont la même orientation si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. Une *orientation* pour E est une classe d'équivalence de bases pour la relation "avoir la même orientation".
Une base $\mathcal{B}$ est *directe* si elle appartient à l'orientation, *indirecte* sinon.

Prop.-défi. On suppose à présent E orienté. Soit $e_1, \dots, e_n \in E$. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ base orthonormée directe (B.O.N.D.). On le note $[e_1, \dots, e_n]$, *produit mixte* de $e_1, \dots, e_n$.

Exemple $n = 3$. Soit $e, e' \in E$. Il existe un unique $e \wedge e' \in E$ tq $\forall \varepsilon \in E$: $[e, e', \varepsilon] = (e \wedge e' \mid \varepsilon)$. On l'appelle *produit vectoriel* de e et e'. Dans une B.O.N.D. : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ -xz' + zx' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

Théorème Soit $e_1, \dots, e_p \in E$. Alors $\det\big((x_i \mid x_j)\big)_{i,j} \geq 0$, avec égalité ssi les e_i sont liés.

Définition Le réel positif $\mathcal{G}(e_1, \dots, e_p) = \sqrt{\det(x_i \mid x_j)}$ s'appelle Gram de $(e_1, \dots, e_p)$.

$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ hérite de la structure euclidienne de E, mais pas de son orientation. $\mathcal{G}(e_1, \dots, e_p)$ est la valeur absolue du parallélotope déf. par $e_1, \dots, e_p$ dans F : $\mathcal{G}(e_1, \dots, e_p) = \big|[e_1, \dots, e_p]\big|$.

2) Coordonnées barycentriques.

Soit $\mathcal{A}$ espace affine euclidien orienté de dimension n, $P_0, \dots, P_n$ une base affine de $\mathcal{A}$.

Proposition Pour $M \in \mathcal{A}$ de coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$\alpha_i = \frac{[\overrightarrow{MP_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{MP_{i-1}}]}{[\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}]}.$$

3) Formule de changement de variables

Théorème Soit $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. Alors $f \circ \varphi$ est intégrable, et

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f \circ \varphi(x) \cdot |\mathrm{Jac}(\varphi(x))|\,dx.$$

IV Résultant

Définition Soit $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ des indéterminées. Le *résultant* en degrés m et n est le polynôme

$$\mathrm{Res}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_m & & a_0 & b_n & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_m & & & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[a_i, b_j].$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{m}$$

Pour $f, g \in A[X]$ de degrés $\leq m$ et $\leq n$, on définit $\mathrm{Rés}_{m,n}(f,g)$ par spécialisation : $f = a_m X^m + \dots + a_0$, $g = b_n X^n + \dots + b_0$.

Théorème Soit $f \in \mathbb{k}[X]_n$ et $g \in \mathbb{k}[X]_m$. Alors $\mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = 0$ ssi $\deg f < n$, $\deg g < m$ ou f et g ont une racine commune.

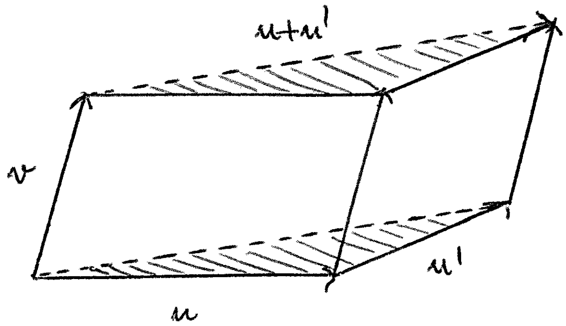
Théorème (formule d'interpolation de Rosenhain) $\boxed{\text{DÉVELOPPEMENT 2}}$

$$\mathrm{Rés}_{m,n}(f,g) = \sum_{\substack{I \subset [\![1, n+m]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = n}} \frac{\prod_{i \in I} f(X_i) \prod_{\bar\imath \in \bar I} g(X_{\bar\imath})}{\prod_{i \in I, \bar\imath \in \bar I} (X_{\bar\imath} - X_i)} \in K(X_1, \dots, X_{n+m}).$$

Corollaire Pour $f = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_m)$, $g = b(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_n)$:

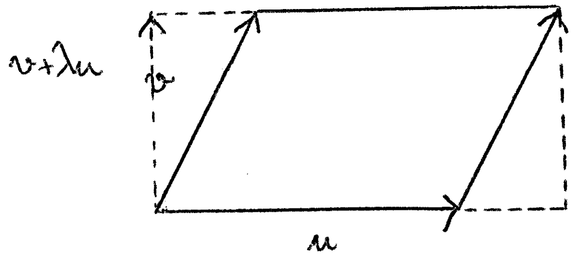
$$\mathrm{Res}(f,g) = a^n b^m \prod (\alpha_i - \beta_j).$$

Multilinéarité du déterminant



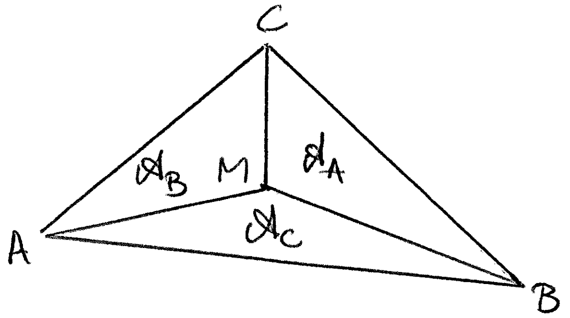
$$\mathcal{A}(u+u',v)=\mathcal{A}(u,v)+\mathcal{A}(u',v)$$

Caractère alterné du déterminant



$$\mathcal{A}(u,v)=\mathcal{A}(u,v+\lambda u)$$

Coordonnées barycentriques



$$M=\frac{\mathcal{A}_A}{\mathcal{A}}A+\frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}}B+\frac{\mathcal{A}_C}{\mathcal{A}}C$$

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_A+\mathcal{A}_B+\mathcal{A}_C.$$