Développements pour la leçon 152
Déterminant. Exemples et applications.

Thomas Dedieu

Vendredi 28 août 2020

1 – Formule de Laplace

Référence [H2G2, Vol. 2, éd. 2015, Thm. 1.8].

(1.1) Notations. Soit n un entier naturel. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \dots, n\}$. Pour $I = \{i_1 < \cdots < i_p\} \in \mathcal{P}_p$, on note $\bar{I}$ le complémentaire de I dans $[\![1, n]\!]$, $\bar{\imath}_1 < \cdots < \bar{\imath}_{n-p}$ les $n - p$ entiers tels que

$$\{i_1, \dots, i_p, \bar{\imath}_1, \dots, \bar{\imath}_{n-p}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Étant donné une matrice $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$, où I et J sont deux ensembles ordonnés finis, on note pour tout $I' \subseteq I$ et $J' \subseteq J$ $A_{I',J'}$ la matrice $(a_{ij})_{i \in I', j \in J'}$ extraite de A en retenant les lignes dont l'indice est dans I' et les colonnes dont l'indice est dans J'.

(1.2) Proposition. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{k}$ anneau commutatif (oui !). On fixe un ensemble de colonnes $J = \{j_1 < \cdots < j_p\}$. On a*

$$\det(A) = \sum_{I = \{i_1 < \cdots < i_p\}} (-1)^{|I|+|J|} \det(A_{IJ}) \det(A_{\bar{I}\bar{J}}),$$

où $|I| = i_1 + \cdots + i_p$.

(1.3) Complément. On notera $\varepsilon(J, I) = (-1)^{|I|+|J|}$; c'est la signature de la permutation $\rho_{J,I}$ définie par

$$\begin{cases} \forall s \in [\![1, p]\!] : \rho_{J,I}(j_s) = i_s \\ \forall t \in [\![1, n-p]\!] : \rho_{J,I}(\bar{\jmath}_s) = \bar{\imath}_s. \end{cases}$$

La permutation $\rho_{J,I}$ est ainsi l'unique permutation induisant deux bijections croissantes de J sur I et de $\bar{J}$ sur $\bar{I}$ respectivement.

La preuve par calcul sur le polynôme déterminant est essentiellement semblable à celle du développement par rapport à une seule colonne, sauf qu'il y a un lemme sur la signature qui cesse d'être facile.

(1.4) Preuve par calcul sur le polynôme déterminant. Pour tout $I \in \mathcal{P}_p$, on pose $\omega_J^I = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(J) = I\big\}$. La clef de la formule est la partition $\mathfrak{S}_n = \coprod_{I \in \mathcal{P}_p} \omega_J^I$, qui donne

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{I \in \mathcal{P}_p} \sum_{\sigma \in \omega_J^I} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(j_1)j_1} \cdots a_{\sigma(j_p)j_p} a_{\sigma(\bar{\jmath}_1)\bar{\jmath}_1} \cdots a_{\sigma(\bar{\jmath}_p)\bar{\jmath}_p}. \tag{1.4.1}$$

Ceci suggère de décomposer $\sigma \in \omega_J^I$ en $(\sigma', \sigma'') \in \mathfrak{S}_I \times \mathfrak{S}_{\bar{I}}$. Précisément, on définit

$$\Phi_J^I : \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p} \to \omega_J^I$$
$$\text{par} \quad \Phi_J^I(\sigma', \sigma'')(j_s) = i_{\sigma'(s)}, \quad \Phi_J^I(\sigma', \sigma'')(\bar{\jmath}_s) = \bar{\imath}_{\sigma''(s)}.$$

Ceci est une bonne définition, et manifestement Φ^I_J est injective. Il est à peu près aussi manifeste qu'elle est surjective, mais de toute façon, nous allons devoir exhiber une réciproque à Φ^I_J plus loin. Attention toutefois : Φ^I_J n'est pas un morphisme de groupes, d'ailleurs ω^I_J n'est même pas un groupe.

Au point où on en est, on a pour tout $I \in \mathcal{P}_p$

$$\begin{aligned}(1.4.2)\qquad &\sum_{\sigma\in\omega^I_J} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(j_1)j_1}\cdots a_{\sigma(j_p)j_p} a_{\sigma(\bar{\jmath}_1)\bar{\jmath}_1}\cdots a_{\sigma(\bar{\jmath}_p)\bar{\jmath}_p}\\ &\qquad = \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\sigma''\in\mathfrak{S}_{n-p}} \varepsilon\big(\Phi^I_J(\sigma',\sigma'')\big) a_{i_{\sigma'(1)}j_1}\cdots a_{i_{\sigma'(p)}j_p} a_{\bar{\imath}_{\sigma''(1)}\bar{\jmath}_1}\cdots a_{\bar{\imath}_{\sigma''(n-p)}\bar{\jmath}_{n-p}}.\end{aligned}$$

On calcule $\varepsilon\big(\Phi^I_J(\sigma',\sigma'')\big)$ dans le Lemme (1.5), et on en déduit que le second membre de (1.4.2) s'écrit

$$(-1)^{|I|+|J|}\left(\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma') a_{i_{\sigma'(1)}j_1}\cdots a_{i_{\sigma'(p)}j_p}\right)\left(\sum_{\sigma''\in\mathfrak{S}_{n-p}}\varepsilon(\sigma'') a_{\bar{\imath}_{\sigma''(1)}\bar{\jmath}_1}\cdots a_{\bar{\imath}_{\sigma''(n-p)}\bar{\jmath}_{n-p}}\right),$$

ce qui compte tenu de (1.4.1) achève la preuve. □

(1.5) Lemme. *On a* $\varepsilon\big(\Phi^I_J(\sigma',\sigma'')\big) = (-1)^{|I|+|J|}\varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma'')$.

Preuve. A tout $(\sigma',\sigma'') \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$, on associe une permutation $\Psi(\sigma',\sigma'') \in \mathfrak{S}_n$ définie par

$$\Psi(\sigma',\sigma'') = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+(n-p) \\ \sigma'(1) & \cdots & \sigma'(p) & p+\sigma''(1) & \cdots & p+\sigma''(n-p)\end{pmatrix}.$$

Pour tout $I \in \mathcal{P}_p$, on définit une permutation $\rho_I \in \mathfrak{S}_n$ par

$$\rho_I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+(n-p) \\ i_1 & \cdots & i_p & \bar{\imath}_1 & \cdots & \bar{\imath}_{n-p}\end{pmatrix}.$$

Je prétends que

$$(1.5.1)\qquad \Phi(\sigma',\sigma'') = \rho_I \circ \Psi(\sigma',\sigma'') \circ \rho_J^{-1},$$

et je laisse au lecteur le soin de le démontrer.

On va maintenant pouvoir montrer l'identité voulue sur les signatures en calculant des nombres d'inversions. D'une part, $\varepsilon(\Psi(\sigma',\sigma'')) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma'')$ car

$$\mathcal{I}(\Psi(\sigma',\sigma'')) = \big(\mathcal{I}(\sigma')\big) \cup \big((p,p)+\mathcal{I}(\sigma'')\big)$$

($\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des inversions, dont il faut calculer le cardinal pour définir le nombre d'inversions). D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\rho_I) &= \big\{(r,s') \in [\![1,p]\!] \times [\![p+1,n]\!] : i_r > \bar{\imath}_{s'-p}\big\}\\ &\simeq \coprod_{1\leqslant r\leqslant p} \big\{s \in [\![1,n-p]\!] : \bar{\imath}_s < i_r\big\}\\ &\simeq \coprod_{1\leqslant r\leqslant p} \bar{I} \cap [\![1,i_r-1]\!]\\ &\simeq \coprod_{1\leqslant r\leqslant p} [\![1,i_r-1]\!] \setminus \{i_1,\dots,i_{r-1}\}\end{aligned}$$

donc

$$I(\rho_I) = \sum_{1\leqslant r\leqslant p} \big(i_r - 1 - (r-1)\big) = \sum_{1\leqslant r\leqslant p} i_r - \sum_{1\leqslant r\leqslant p} r = |I| - \frac{p(p+1)}{2}.$$

□

(1.6) *Preuve du complément (1.3).* Il apparaît dans la preuve ci-dessus que $\varepsilon(J,I)$ est la signature de la permutation $\rho_I \circ \rho_J^{-1}$. Le résultat suit, en observant que $\rho_I \circ \rho_J^{-1} = \rho_{J,I}$. □

(1.7) Preuve par récurrence sur p. On laisse l'initialisation de la récurrence au lecteur. Supposons par récurrence la formule connue pour $p' \leqslant p-1$ colonnes. On commence par développer par rapport à la colonne j_1 :

$$\det(A) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (-1)^{i+j_1} a_{i,j_1} \det(A_{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}).$$

Ensuite on développe chacun des déterminants de taille $n-1$ par rapports aux colonnes correspondant aux colonnes $j_2,\dots,j_p$ de A. Attention, il y a un décalage de numérotation, elles sont devenues les colonnes numéros $j_2-1,\dots,j_p-1$ de la matrice $A_{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}$. On a un décalage du même type dans la numérotation des lignes ; pour $I' \in [\![1,n]\!]^{p-1}$ ne contenant pas i, on note $s(i,I')$ le nombre de $i' \in I$ qui sont $> i$ (c'est le nombre de lignes dont l'indice va être décalé par la suppression de la ligne i). On obtient

$$\det(A_{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}) = \sum_{I' \not\ni i} (-1)^{|I'|-s(i,I')+|J'|-(p-1)} \det(A^{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}_{I'J'}) \det(A_{\bar{I}\bar{J}}),$$

où on a posé $J' = \{j_2 < \cdots j_p\}$, et $A^{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}_{I'J'}$ est la matrice de taille $p-1$ obtenue en extrayant de $A_{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}$ les lignes I' et les colonnes J' de A.

Reste à recombiner ces déterminants $p-1$ entre eux, à nouveau avec la formule de développement par rapport à une colonne, utilisée à l'envers. Le point sur lequel il faut se fixer est que chaque $I = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ apparaît sous les p formes (i_r, I'_r) avec $I'_r = I - \{i_r\}$, $r = 1,\dots,p$; notons au passage que $s(i_r, I'_r) = p - r$.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_i \sum_{I'\not\ni i} (-1)^{i+j_1+|I'|-s(i,I')+|J'|-(p-1)} a_{i,j_1} \det(A^{\hat{\imath},\hat{\jmath}_1}_{I'J'}) \det(A_{\bar{I}\bar{J}}) \\ &= \sum_I (-1)^{|I|+|J|} \left(\sum_{r=1}^p (-1)^{-s(i_r,I'_r)-p+1} a_{i_1,j_1} \det(A^{\hat{\imath}_1,\hat{\jmath}_1}_{I'J'}) \right) \det(A_{\bar{I}\bar{J}}).\end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses est le développement de $\det(A_{IJ})$ par rapport à sa première ligne, puisque $(-1)^{-s(i_r,I'_r)-p+1} = (-1)^{r+1}$ (voir ci-dessous). □

(1.7.1) Remarque. On a utilisé la formule diabolique

$$\forall \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r = \pm 1 : \quad (-1)^{\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_r a_r} = (-1)^{a_1+\cdots+a_r},$$

qui vaut en vertu de la non moins diabolique identité $(-1)^{-1} = -1$.

2 – Expression du résultant en fonction des racines

Référence [AJ, §6.1, p. 57].

(2.1) Proposition. *Soit $f, g \in \mathbf{k}[X]$ de degrés respectifs (au plus) m et n. On suppose que f et g sont scindés, et on note*

$$f = a \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (X - \alpha_i) \quad et \quad g = b \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} (X - \beta_j).$$

Alors

$$\mathrm{Res}_{m,n}(f, g) = a^n b^m \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (\alpha_i - \beta_j). \tag{2.1.1}$$

(2.2) Corollaire. [AJ, Corollaire 7, p. 121] *On considère le polynôme $f = a \prod_{1 \leqslant i \leqslant m}(X - \alpha_i)$, $a \neq 0$. On a*

$$\mathrm{Disc}(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a^{2m-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Je vais démontrer la formule (2.1.1) en tant que corollaire de l'énoncé suivant. Ce n'est peut-être pas la meilleure façon de procéder, mais ça permet d'obtenir la formule sans développer tout le formalisme du résultant. D'autre part l'énoncé qui suit a son intérêt propre.

(2.3) Théorème (formule d'interpolation de Rosenhain). *Soit $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n$ des indéterminées, et K l'anneau (commutatif) $\mathbf{k}[a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n]$. On considère les polynômes $f, g \in K[X]$*

$$f = a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 \quad et \quad g = b_n X^n + \cdots + b_1 X + b_0.$$

On a l'identité suivante dans $K(X_1, \ldots, X_{n+m})$ (fractions rationnelles à $n + m$ indéterminées $X_1, \ldots, X_{n+m}$ et coefficients dans K) :

$$\mathrm{Res}_{m,n}(f, g) = \sum_{\substack{I \subseteq [\![1, n+m]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = n}} \frac{\prod_{i \in I} f(X_i) \prod_{\bar{\imath} \in \bar{I}} g(X_{\bar{\imath}})}{\prod_{i \in I, \bar{\imath} \in \bar{I}} (X_{\bar{\imath}} - X_i)}. \tag{2.3.1}$$

On utilise ici la notation $\bar{I}$ pour le complémentaire de I dans $[\![1, n + m]\!]$. Bien sûr on a

$$\sum_{\substack{I \subseteq [\![1, n+m]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = n}} \frac{\prod_{i \in I} f(X_i) \prod_{\bar{\imath} \in \bar{I}} g(X_{\bar{\imath}})}{\prod_{i \in I, \bar{\imath} \in \bar{I}} (X_{\bar{\imath}} - X_i)}. = \sum_{\substack{I \subseteq [\![1, n+m]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = n}} \prod_{i \in I, \bar{\imath} \in \bar{I}} \frac{f(X_i) g(X_{\bar{\imath}})}{(X_{\bar{\imath}} - X_i)}.$$

On remarquera que le membre de gauche de (2.3.1) est dans le sous-anneau K de $K(X_1, \ldots, X_{n+m})$, donc le membre de droite aussi.

Avant de démontrer cette formule, voyons tout de suite comment elle permet d'obtenir (2.1.1).

(2.4) Corollaire. *Soit $a, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ des indéterminées, et K' l'anneau $\mathbf{k}[a, \alpha_1, \dots, \alpha_m]$. On considère le polynôme*

$$f = a \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (X - \alpha_i) \in K'[X]$$

et $g \in \mathbf{k}[X]$ de degré au plus n. On a l'identité suivante dans K' :

$$\operatorname{Res}_{m,n}(f, g) = a^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} g(\alpha_i). \tag{2.4.1}$$

Preuve. On spécialise la formule de Rosenhain pour f et g en évaluant $X_1, \dots, X_m$ en $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ respectivement ($X_{m+1}, \dots, X_{m+n}$ restent des indéterminées), ce qui va donner une égalité dans $\operatorname{Frac}(K') = \mathbf{k}(a, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dans le membre de droite de (2.3.1), seul le terme correspondant à $I = [\![m+1, m+n]\!]$ est non nul, et on a ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{m,n}(f, g) &= \frac{\prod_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n} f(X_i) \prod_{1 \leqslant i' \leqslant m} g(\alpha_i)}{\prod_{\substack{m+1 \leqslant i \leqslant m+n \\ 1 \leqslant i' \leqslant m}} (X_i - \alpha_{i'})} \\ &= a^n \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} g(\alpha_i), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $f(X_i) = a \prod_{1 \leqslant i' \leqslant m} (X_i - \alpha_{i'})$ pour tout $i = m+1, \dots, m+n$ par définition de f. Pour conclure, on remarque qu'on a en fait obtenu une identité dans le sous-anneau K' de $\operatorname{Frac}(K')$. $\square$

(2.5) Remarque. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, le fait de travailler avec des indéterminées nous simplifie la vie. Il évite notamment de se poser des questions délicates sur ce qui se passe quand f possède des racines multiples.

Preuve de la Prop. (2.1) et du Corollaire (2.2). La proposition (2.1) se déduit directement de (2.4.1).

Dans la situation du corollaire (2.2), on écrit $f = (X - \alpha_i) f_i$ pour chaque i. On a alors $f'(\alpha_i) = f_i(\alpha_i)$. En appliquant la formule (2.4.1) avec $g = f'$ on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{m,m-1}(f, f') &= a^{m-1} \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} f_i(\alpha_i) \\ &= a^{m-1} \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} a \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a^{2m-1} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \end{aligned}$$

Le corollaire (2.2) s'ensuit, puisque par définition $a\operatorname{Disc}(f) = \operatorname{Res}_{m,m-1}(f, f')$. $\square$

(2.6) *Preuve du Théorème (2.3).* On observe l'identité matricielle

$$\text{(2.6.1)}\quad \begin{pmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{m+n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & X_{m+n} & \dots & X_{m+n}^{m+n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_m & & a_0 & b_m & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_m & & & b_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(X_1) & \dots & X_1^{n-1} f(X_1) & g(X_1) & \dots & X_1^{m-1} g(X_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(X_{m+n-1}) & \dots & X_{m+n-1}^{n-1} f(X_{m+n-1}) & g(X_{m+n-1}) & \dots & X_{m+n-1}^{m-1} g(X_{m+n-1}) \end{pmatrix}$$

(matrices carrées de taille $m+n$ à coefficients dans $K[X_1, \dots, X_{m+n}]$).

On calcule le déterminant du membre de droite en effectuant un développement de Laplace par rapport aux n premières colonnes. On obtient, dans les notations habituelles pour le développement de Laplace [1] :

$$\sum_{\substack{I \subseteq [\![1,m+n]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=n}} \varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot \begin{vmatrix} f(X_{i_1}) & \dots & X_{i_1}^{n-1} f(X_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ f(X_{i_n}) & \dots & X_{i_n}^{n-1} f(X_{i_n}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g(X_{\bar\imath_1}) & \dots & X_{\bar\imath_1}^{m-1} g(X_{\bar\imath_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ g(X_{\bar\imath_m}) & \dots & X_{\bar\imath_m}^{m-1} g(X_{\bar\imath_m}) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,m+n]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=n}} \varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot f(X_{i_1}) \cdots f(X_{i_n}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & X_{i_1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & X_{i_n}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot g(X_{\bar\imath_1}) \cdots g(X_{\bar\imath_m}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & X_{\bar\imath_1}^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & X_{\bar\imath_m}^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{(2.6.2)}\quad = \sum_{\substack{I \subseteq [\![1,m+n]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=n}} \varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot \Big(\prod_{i \in I} f(X_i) \Big) \cdot V_I \cdot \Big(\prod_{\bar\imath \in \bar I} g(X_{\bar\imath}) \Big) \cdot V_{\bar I},$$

en notant V_J le déterminant de Vandermonde

$$V_J = \begin{vmatrix} 1 & \dots & X_{j_1}^{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & X_{j_p}^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{\{j<j'\} \subseteq J} (X_{j'} - X_j).$$

pour tout $J = \{j_1 < \cdots j_p\} \subseteq [\![1, m+n]\!]$.

Nous allons maintenant calculer $\varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot V_I \cdot V_{\bar I}$ pour tout I. Comme dans (1.3), $\varepsilon([\![1,n]\!], I) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + |I|}$ est la signature de la permutation

$$\rho_I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n & n+1 & \dots & n+m \\ i_1 & \dots & i_n & \bar\imath_1 & \dots & \bar\imath_m \end{pmatrix}.$$

1. voir (1.1), pour $I \subseteq [\![1, m+n]\!]$ de cardinal n on note $I = \{i_1 < \cdots < i_n\}$ et $\bar I = \{\bar\imath_1 < \cdots < \bar\imath_m\}$ son complémentaire dans $[\![1, m+n]\!]$; $\varepsilon([\![1,n]\!], I) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2} + i_1 + \cdots + i_n}$, voir (1.3).

Notant $\rho = \rho_I$ pour alléger les notations, on a

$$\prod_{\{s<s'\}\subseteq[\![1,m+n]\!]} (X_{\rho(s')} - X_{\rho(s)}) = \varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot \prod_{\{s<s'\}\subseteq[\![1,m+n]\!]} (X_{s'} - X_s)$$

par définition de la signature par le nombre d'inversions. Le membre de gauche ci-dessus se décompose comme le produit

$$\underbrace{\prod_{\{s<s'\}\subseteq[\![1,n]\!]} (X_{\rho(s')} - X_{\rho(s)})\cdot}_{=V_I} \underbrace{\prod_{\{s<s'\}\subseteq[\![n+1,m+n]\!]} (X_{\rho(s')} - X_{\rho(s)})\cdot}_{=V_{\bar{I}}} \underbrace{\prod_{\substack{s\in[\![1,n]\!]\\ s'\in[\![n+1,n+m]\!]}} (X_{\rho(s')} - X_{\rho(s)})}_{=\prod_{i\in I,\bar{\imath}\in\bar{I}}(X_{\bar{\imath}}-X_i)}.$$

On en déduit finalement pour tout I

$$\varepsilon([\![1,n]\!], I) \cdot V_I \cdot V_{\bar{I}} = \frac{V_{[\![1,m+n]\!]}}{\prod_{i\in I,\bar{\imath}\in\bar{I}}(X_{\bar{\imath}} - X_i)}. \tag{2.6.3}$$

Nous allons pouvoir conclure. Le déterminant du membre de gauche de (2.6.1) est $V_{[\![1,m+n]\!]} \cdot \mathrm{Res}_{m,n}(f,g)$, donc d'après (2.6.2) et (2.6.3) on a

$$V_{[\![1,m+n]\!]} \cdot \mathrm{Res}_{m,n}(f,g) = V_{[\![1,m+n]\!]} \cdot \sum_{\substack{I\subseteq[\![1,m+n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=n}} \frac{\left(\prod_{i\in I} f(X_i)\right)\cdot\left(\prod_{\bar{\imath}\in\bar{I}} g(X_{\bar{\imath}})\right)}{\prod_{i\in I,\bar{\imath}\in\bar{I}}(X_{\bar{\imath}} - X_i)}$$

ce qui donne le résultat annoncé en simplifiant par $V_{[\![1,m+n]\!]}$, qui est inversible dans $K(X_1,\dots,X_{m+n})$.
□

Références

[AJ] F. Apéry, J.-P. Jouanolou, *Élimination : le cas d'une variable.*

[H2G2] Philippe Caldero et Jérôme Germoni, *(Nouvelles) Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage & Mounet, (2017) 2015.