5. Espaces complets.

Exercice 1 Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 2
1. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme uniforme, n'est pas complet.
2. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est complet.
3. Montrer que $C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, n'est pas complet.

Exercice 3 Montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$, mais que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 4 Soit $c_0 = \big\{(x_n) \subset \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\big\}$.
Montrer que $c_0 \subset \ell^\infty$ puis que c_0 est un espace de Banach.

Exercice 5
1. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$ qui induit la topologie discrète sur $\mathbb{N}^*$; est-elle complète ?
2. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

Exercice 6 Soit E un espace normé. Montrer qu'il est complet si et seulement si la sphère unité $S = \{x / \|x\| = 1\}$ est complète.

Exercice 7
1. Montrer que l'espace $C([0,1])$ est complet pour la norme uniforme mais pas pour la norme $||.||_1$.
2. Montrer que l'espace S des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme uniforme, n'est pas complet. Trouver un espace métrique complet contenant S comme sous-espace dense.

Exercice 8
1. Soit f un homéomorphisme d'espaces métriques $f : X \to Y$; montrer que X peut être complet sans que Y le soit.
2. On suppose de plus que f est uniformément continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.
3. On considère $E = \{f \in C^1([0,1])\ ;\ f(0) = 0\}$, muni de la métrique $d(f,g) = \inf(1, \sup|f'(t) - g'(t)|)$. Montrer que E est complet pour cette métrique.

Exercice 9 L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?
1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1 + |x-y|)$.

Exercice 10
1. Soit $X = \mathcal{C}^1([a,b])$. Est-ce un espace complet si on le munit de la norme $\|.\|_\infty$?
2. L'espace (X, N) est-il complet pour la norme

$$N(f) = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\| \ ?$$

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum u_k$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. On veut démontrer que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente. En déduire que si toute série normalement convergente est convergente, alors E est complet.
2. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que S_n est une suite de Cauchy. En déduire que si E est complet, alors toute suite normalement convergente est convergente.

Exercice 12 Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, définissons

$$\begin{aligned} d(n,m) &= 0 \text{ pour } m = n \\ &= 1 + \frac{1}{n+m} \text{ pour } m \neq n \end{aligned}$$

1. Montrer que d est une métrique sur $\mathbb{N}$ pour laquelle il est complet.
2. Construire dans $(\mathbb{N}, d)$ une suite de boules fermées non vides emboîtées dont les rayons ne tendent pas vers 0, et d'intersection vide.

Exercice 13 Soit X un espace métrique et (a_n) une suite de Cauchy dans X.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite de réels $(d(a_n, x))$ a une limite. On note $f(x)$ cette limite ; montrer que l'application $x \to f(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\inf_{x\in X} f(x)$. Quand cette borne inférieure est-elle atteinte ?
3. Déduire de ce qui précède que si X n'est pas complet, il existe une application $\phi : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

Exercice 14

1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|;$$
En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

Exercice 15

1. On considère une matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients réels telle que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que quels que soient les réels $b_1, b_2, \cdots b_n$, le système d'équations linéaires
$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$
admet toujours une solution unique. En déduire $\det(I - A) \neq 0$.
2. Montrer sous les mêmes hypothèses que le système non linéaire
$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \sin(a_{ij} x_j) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$
admet une unique solution.