3. Continuité.

Exercice 1 Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x\ ;\ f(x) < \lambda\}$ et $\{x\ ;\ f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).
3. Soit $A \subset X$. A quelle condition $f = \mathbf{1}_A$ est-elle continue sur X ?

Exercice 2 Soit f, g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé.

1. Montrer que $\{f = g\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coincident sur une partie dense de X, alors $f = g$.
2. Application : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(r) = rf(1)$ pour tout rationnel r et en déduire l'expression de f.

Exercice 3 Montrer que si f est continue de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé, son graphe G est fermé dans $X \times Y$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x, y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Exercice 5 Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si on désigne par $l(x)$ la limite de la suite x, montrer que l est une application continue de c dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$.

1. Montrer que la fonction φ est continue, 1-périodique, et étudier la fonction f telle que
$$f(x) = \sum_n \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$
2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, et on considère les deux suites de terme
$$z_k = \frac{1}{2^k} E(2^k x_0), \quad y_k = z_k + \frac{1}{2^k}.$$
Montrer que la suite (z_k) croît vers x_0 et que la suite (y_k) décroît vers x_0. Calculer $\frac{f(z_k)-f(y_k)}{z_k-y_k}$ et en déduire que f n'est pas dérivable en x_0.
On a ainsi construit une fonction continue, nulle part dérivable.

Exercice 7 Montrer que le carré unité fermé et le disque fermé dans $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

Exercice 8 Montrer que la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ tout entier, et que deux boules ouvertes sont homéomorphes entre elles.

Exercice 9 Soit f une injection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f est strictement monotone.
2. Montrer que l'image par f d'un intervalle ouvert est encore un intervalle ouvert ; en déduire que f est ouverte et donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Exercice 10

1. Trouver un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$; de $]-1,1[$ sur $]a,b[$.
2. Montrer que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et c un point n'appartenant pas à I, les ensembles I et $I \cup \{c\}$ ne sont pas homéomorphes bien qu'en bijection.

Exercice 11 Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite réglée, si elle a en tout point une limite à droite et une limite à gauche (et bien sûr, une limite à droite en 0, une limite à gauche en 1.) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions en escalier est une fonction réglée (Pour culture : il se trouve que la réciproque est vraie).

Exercice 12 Soit E l'espace $C_b(\mathbb{R}, C)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la métrique de la convergence uniforme d.

1. On dit qu'un espace topologique est *séparable* s'il contient un dénombrable dense. Montrer que dans un espace métrique séparable, toute collection d'ouverts deux à deux disjoints est au plus dénombrable.
2. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $d(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) \geqslant 2$. En déduire que E n'est pas séparable.

Exercice 13 Soit (f_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme. Montrer que la suite des degrés tend vers l'infini.

Exercice 14 Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) ne sont pas homéomorphes, mais sont tous les deux "totalement discontinus" au sens suivant : leurs seuls connexes sont les points. (Remarquer que A connexe dans $Y \Rightarrow A$ connexe dans X si $Y \subset X$).

Exercice 15 Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) \notin \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$? (Regarder l'image de f.)

Exercice 16 Soit $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que les seuls connexes de X sont les points. (A connexe dans $X \Rightarrow A$ connexe dans $\mathbb{R}$)

Exercice 17 Soit X un ouvert d'un espace vectoriel normé E ; montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. (*Indication :* fixer $a \in X$ et considérer

$$A = \{x \in X, \text{relié à } a \text{ par un chemin dans } X\}.)$$

Exercice 18 Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'image réciproque de tout point est non bornée (raisonner par l'absurde et utiliser que le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{R}^2$ est connexe).