2. Suites.

Exercice 1 Trouver les valeurs d'adhérence de la suite :

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \cdots, 0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \cdots, \frac{2^k-1}{2^k}, 1, 0, ...$$

Exercice 2 Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots\}$.

1. Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A} \backslash A$.
2. Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

Exercice 3

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour $t \in T$ où T est non dénombrable. Même conclusion.

Exercice 4 Soit (u_n) une série positive divergente telle que u_n décroit vers 0 et on pose $A = \{\pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n,\ n \geqslant 1\}$. Montrer que $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $\mathbb{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbb{R}^n$. On se restreint au cas $n = 1$.
2. Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbb{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4. On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})$.

Exercice 6 Soit dans un espace métrique (X, d) une suite (x_n) telle que les trois sous-suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite elle-même converge.

Exercice 7 Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite d'un espace métrique (X, d). On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = a_m$, et que $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite initiale (a_{p,n_p}) telle que $\lim_{p\to\infty} a_{p,n_p} = a$.

Exercice 8 Soit E un ensemble non vide, et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ d'éléments de E. Pour $x, y \in X$, on pose $p(x, y) = \min\{n; x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, et ∞ si $x = y$.

1. Montrer que $d(x, y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie l'inégalité ultramétrique
$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)).$$
2. Quelles sont les boules ouvertes et les boules fermées pour cette métrique ?

Exercice 9 On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (vérifier que c'en est bien une !) $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 10 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. On va montrer que f est soit nulle, soit la fonction identité.

1. Remarquer que $f(x)\geqslant 0$ si $x\geqslant 0$ et ainsi, que f est croissante.
2. Montrer que pour tout x réel on peut construire une suite (r_k) et une suite (s_k) de rationnels telles que $r_k\uparrow x$ et $s_k\downarrow x$. En déduire le résultat.

Exercice 11 On note X l'espace des suites réelles $x=(x_n)$ et on le munit de la topologie dont les ouverts élémentaires sont

$$V(x;n_1,n_2,\cdots n_k;\varepsilon)=\{y\in X;|x_{n_i}-y_{n_i}|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,k\}.$$

Vérifier qu'on a bien défini ainsi une base de topologie.

Exercice 12 Comparer sur $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, l'espace des suites de 0 et de 1, les topologies définies par les distances $d(x,y)=\dfrac{1}{\min_n\{x_n\neq y_n\}}$ si $x\neq y$, 0 sinon, et $\delta(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|$.

Exercice 13 Soit (F_n) une suite décroissante de fermés dans un espace topologique X, et soit (x_n) une suite convergente dans X telle que pour chaque n, $x_n\in F_n$. Vérifier que $\lim_{x\to\infty}x_n\in\bigcap F_n$. Que peut-on dire si la suite de fermés n'est plus décroissante ?

Exercice 14 On va montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1,1]$. Pour commencer, on approche la fonction $|t|$.

1. Montrer que la suite de polynômes définis par récurrence :

$$p_{n+1}(t)=p_n(t)+\frac{1}{2}(t^2-p_n^2(t)),\quad p_0(t)=0,$$

   converge vers $|t|$.
2. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur $[-1,1]$ est limite d'une suite de polynômes.
3. Montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1,1]$.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de réels

$$x_n=(1+\frac{1}{n})\sin(n\frac{\pi}{6})\quad\text{et}\quad x_{m,n}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\text{ avec }m\geqslant 1,n\geqslant 1.$$

Exercice 16 On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle : si F est fini, trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de F ; si F est infini, montrer que F contient un dénombrable dense D et trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de D.

Exercice 17 Soit (ε_k) une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $S_n=\sum_{k=0}^n\varepsilon_k$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (S_n) est un intervalle de $\mathbb{Z}$.

Exercice 18 On considère une suite (x_n) de $[0,1]$ telle que $x_{n+1}-x_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence est un intervalle fermé de $[0,1]$.
2. On suppose de plus que cette suite est une suite récurrente i.e. définie par $x_{n+1}=f(x_n)$ où f est continue de $[0,1]$ dans lui-même, et un point initial $x_0\in[0,1]$. Montrer alors que la suite converge (on commencera par remarquer que si $x\in A$, alors $x=f(x)$, et que si $x_m\in A$ pour un indice m, alors la suite converge.)
3. Soit $x=(x_n)$ une suite de l^∞ ; montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y de terme général $y_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ est un intervalle. En déduire que l'application f de l^∞ dans lui-même qui associe y à x, n'est pas bijective.