# 1. Espaces topologiques, métriques et normés : premières notions.

**Exercice 1** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, montrer que

1. Tout ensemble réduit à un point est fermé ;
2. Tout ensemble fermé et majoré contient sa borne supérieure.

**Exercice 2** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Est-il vrai que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable de disques ouverts deux à deux disjoints ?

**Exercice 3** Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants : $\mathbb{Q}$ ; $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x < 1, y = 0\}$ ; $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = 0\}$ ; $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$ ; le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 4** $U$ dans $\mathbb{N}$ est dit ouvert s'il est stable par divisibilité, c.a.d. tout diviseur de $n \in U$ est encore dans $U$. Montrer qu'on a défini ainsi une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'est pas la topologie discrète.

**Exercice 5** On va montrer que l'ensemble $D$ des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p$ et $q$ décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que $D$ est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u = \sqrt{2} - 1$ ; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m$ vérifiant $a < mu^n < b$.
   En déduire le résultat.

**Exercice 6** Soit $X$ un ensemble non vide et $\Sigma$ une famille de parties de $X$ stable par intersection finie et contenant $X$. Montrer que la plus petite topologie $\mathcal{T}$ contenant $\Sigma$ (la topologie engendrée par $\Sigma$) est constituée des unions d'ensembles de $\Sigma$, ou, de façon équivalente,

$$A \in \mathcal{T} \iff \forall x \in A \; \exists S \in \Sigma \; ; \; x \in S \subset A.$$

Montrer que l'on peut affaiblir l'hypothèse de stabilité par intersection finie en :
$(*) \qquad \forall S_1, S_2 \in \Sigma,\ \forall x \in S_1 \cap S_2,\ \exists S_3 \in \Sigma \; ; \; x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2.$

**Exercice 7** Si $A$ est une partie de l'espace topologique $X$, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que $\alpha$ et $\beta$ sont des applications croissantes pour l'inclusion de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$.
2. Montrer que si $A$ est ouvert, $A \subset \alpha(A)$ et si $A$ est fermé, $\beta(A) \subset A$. En déduire que $\alpha^2 = \alpha$ et $\beta^2 = \beta$.
3. Construire $A \subset \mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles : $A$, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$ soient tous distincts.
4. Est-ce que $\overline{\alpha(A)}$ et $\overset{\circ}{\beta(A)}$ sont toujours égaux à l'un des cinq ensembles de la question précédente ?

**Exercice 8** Dans un espace topologique, on définit la frontière d'une partie $A$ comme étant $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Montrer que $\partial A = \partial(A^c)$ et que $A = \partial A \iff A$ est fermé d'intérieur vide.
2. Montrer que $\partial(\overline{A})$ et $\partial(\mathring{A})$ sont toutes deux incluses dans $\partial A$, et donner un exemple où ces inclusions sont strictes.
3. Montrer que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, et que l'inclusion peut être stricte ; montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ (établir $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$).
   Montrer que $\overset{\circ}{A \cup B} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ reste vrai lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ (raisonner par l'absurde).

**Exercice 9** On rappelle la construction de l'ensemble triadique $K$ de Cantor : on part du segment $[0,1]$ dont on supprime l'intervalle médian $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ ; à la deuxième étape, on supprime les intervalles $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$, et ainsi de suite... On note $K_n$ la réunion des intervalles restants à la $n$-ième étape, et $K=\bigcap K_n$.

1. Quelle sont l'adhérence et l'intérieur de $K$ ?
2. L'ensemble $K$ est-il dénombrable ?

**Exercice 10** 1. Montrer que dans tout espace métrique $(E,d)$ une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a,r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2,||.||_\infty)$, $E=[0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]$ avec la distance induite).

2. Montrer que la famille des boules ouvertes de $(E,d)$ vérifie la condition $(*)$ de l'exercice 6.

**Exercice 11** $(E,||.||)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a,r)\subset\overline{B}(b,R)\iff r\leqslant R$ et $||a-b||\leqslant R-r$.

**Exercice 12** 1. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $K$ sa boule unité fermée. Montrer que
(i) $K$ est symétrique,
(ii) $K$ est convexe, fermé, borné,
(iii) 0 est un point intérieur à $K$.

2. Réciproquement, montrer que si $K$ possède les trois propriétés ci-dessus, il existe une norme dont $K$ soit la boule unité fermée, en considérant $p(x)=\inf\{a>0\ ;\ \frac{x}{a}\in K\}$.

**Exercice 13** On considère dans $\mathbb{R}^2$, les deux applications

$$n(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x+ty|,\qquad m(x,y)=\int_0^1|x+ty|\ dt.$$

1. Montrer que $n$ et $m$ définissent deux normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner les boules unités fermées associées, et trouver des constantes effectives $A$,$B$, telles que $A\ n(x,y)\leqslant m(x,y)\leqslant B\ n(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

**Exercice 14** 1. Soit $X$ un espace topologique, et $D$ un sous-ensemble dense de $X$. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire
(i) Le complémentaire de $D$ est d'intérieur vide.
(ii) Si $F$ est un fermé contenant $D$, alors $F=X$.
(iii) $D$ rencontre tout ouvert non vide de $X$.

2. Montrer qu'un ensemble $A\subset X$ rencontre toute partie dense dans $X$ si et seulement si il est d'intérieur non vide.
3. Soit $E$ et $G$ deux ouverts denses dans $X$ ; montrer que $E\cap G$ est encore dense dans $X$. En déduire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est une intersection décroissante d'ouverts denses.

**Exercice 15** Soit $E=\{f\in C^1([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f(0)=0\}$. On pose

$$||f||=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)+f'(x)|,\ \text{ et } N(f)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur $E$.