Licence de mathématiques L3 — 10 juin 2009
Université Claude Bernard (Lyon 1)
U.F.R. de Mathématiques

Examen de Topologie

Durée: 3 heures

Ni document ni calculatrice. Le barême sur 20 est indicatif.

I - Exercice (4 points)

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d). Le diamètre de A est défini par

$$\operatorname{diam}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a,a' \in A} d(a, a').$$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (sous ces conditions, on dit que A est bornée)

   i) $\exists\, x \in X, \quad \exists\, r > 0\colon A \subset B(x, r)$;

   ii) $\forall\, x \in X, \quad \exists\, r > 0\colon A \subset B(x, r)$;

   iii) A est de diamètre fini.

2. Montrer que si $A \neq \emptyset$ est une partie bornée, alors $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

3. Montrer que si A et B sont deux parties bornées, alors $A \cup B$ est bornée. Donner une majoration de $\operatorname{diam}(A \cup B)$ en fonction de $\operatorname{diam}(A)$, $\operatorname{diam}(B)$ et $\mathbf{d}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

II - Problème (7 points)

On note l_1 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_n |u_n|$ est convergente.

1. Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note

$$d_1((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_n |v_n - u_n|.$$

   Montrer que d_1 est bien définie.

2. Montrer que d_1 définit une distance sur l_1.

3. Dans l'espace métrique (l_1, d_1), on note 0 la suite nulle et δ_k la suite qui vaut 1 en k et 0 ailleurs. La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 contient-elle la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$? La suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

4. On note maintenant l_2 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |u_n|^2 < \infty$ et $d_2 : l_2 \times l_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$d_2((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Big(\sum_n |v_n - u_n|^2\Big)^{1/2}.$$

   On admettra ici que d_2 est bien définie et détermine une distance sur l_2.

   Montrer que $l_1 \subset l_2$ et que pour tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$, on a $d_2((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, 0) \leq d_1((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, 0)$.

5. La distance d_2, restreinte à $l_1 \times l_1$, définit alors une nouvelle distance sur l_1. Existe-t-il une suite d'éléments de l_1 qui converge vers 0 pour d_2 mais pas pour d_1 ? (On pourra considérer des éléments de l_1 qui sont des suites constantes jusqu'à un certain rang puis nulles ensuite.)

6. Les distances d_1 et d_2 sont-elles équivalentes sur l_1 ?

III - Question de cours (4 points).

1. Donner la définition d'un espace topologique.

2. Donner la définition d'une application continue entre espaces topologiques.

3. Démontrer le théorème :

   "Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y est continue si et seulement si la préimage par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X."

IV - Quizz (5 points).

Pour chaque question, donnez l'exemple demandé ou, si vous pensez qu'un tel exemple n'existe pas, donnez un bref argument. Dans les deux cas, votre réponse ne devrait pas dépasser trois lignes.

1. Pouvez-vous donner un exemple d'espace métrique qui ne soit pas un espace normé ?

2. Pouvez-vous donner un exemple d'une suite dans $\mathbb{R}$ qui admette exactement une valeur d'adhérence mais qui ne soit pas convergente ?

3. Pouvez-vous donner un exemple d'une partie A d'un espace topologique X (avec $A \neq \emptyset, X$) à la fois ouverte et fermée ?

4. Pouvez-vous donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ non continue ? (où $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$).

5. Pouvez-vous donner un exemple d'un espace topologique X et d'un sous-ensemble $A \subset X$ tel que X, A et $X \setminus A$ soient tous trois connexes ?